

یہ ممکن ہے کہ تمام تفرقی سر معدوم ہوں، اس صورت میں اس مسئلہ پر
دوسرے طریقوں سے بحث کی جاسکتی ہے۔
مثلاً اگر توانائی بالقوہ

(۱۸۴)

ک = لا تو $\frac{1}{2}$

شکل (۱۰۲)

کی شکل کی ہو تو تشکیل لا = میں تمام تفرقی سر معدوم ہوتے ہیں۔ تفاعل ک
کی ترسیم کھینچتے پر معلوم ہو گا کہ توازن قائم ہے۔

یہ ہو سکتا ہے کہ ک کے تمام تفرقی سر اس وجہ سے معدوم ہوں کہ
اس پورے علاقہ میں جو زیر بحث تشکیل کے گرد ہے ک مستقل ہے۔ اگر
ایسا ہے تو نظام کو ہٹایا جاسکتا ہے اور کوئی قوت نہیں ہوگی جو اس کو
اس نئی تشکیل سے حرکت دے۔ ہر تشکیل توازن کی تشکیل ہوگی۔ اس
قسم کے توازن کو تعدیلی توازن کہتے ہیں۔

تعدیلی توازن کی ایک صورت مثال ۲ صفحہ ۲۵۸ میں واقع ہو چکی ہے،
دروازہ جو قبضوں کے انتصابی خط کے گرد آزادانہ گھوم سکے۔ دوسری صورت ایک
کرہ کی ہے جو افقی مستوی پر لڑھکتا ہو۔

نظامات جنگو آزادی کے مختلف درجے حاصل ہوں

۱۵۳۔ ایک ہم نے صرف ان نظامات پر بحث کی ہے جو تشکیلات کے
صرف ایک سلسلہ میں سے حرکت کرنے پر مجبور تھے یعنی نظامات جن کو صرف
آزادی کا ایک درجہ حاصل تھا۔ اس نظام کی قائمیت یا غیر قائمیت متعین
کرنے کا مسئلہ جس کو آزادی کے ایک سے زیادہ درجے حاصل ہوں زیادہ
پیچیدہ ہے۔

اگر توازن کے محل میں توانائی بالقوہ مطلقاً اقل ہے اور اس لیے ہر ممکن
حرکت سے توانائی بالقوہ میں اضافہ ہو جاتا ہے تو یہ توازن قائم ہو گا۔ اسکو
اسی استدلال سے ثابت کیا جاسکتا ہے جو اس صورت میں استعمال کیا گیا تھا

جس میں آزادی کا صرف ایک درجہ حاصل تھا۔
 اگر توانائی بالقوہ مطلقاً قفل نہیں ہے یعنی اگر ایسے ہٹاؤ ممکن ہیں
 جس میں توانائی بالقوہ گھٹتی ہے جبکہ نظام توازن کے محل سے حرکت کرتا
 ہے تو یہ تشکیل غیر قائم توازن کی تشکیل ہوگی۔ اس کو آئندہ ثابت کیا جائیگا
 کیونکہ اس باب کے طریقوں سے اسے ثابت نہیں کیا جاسکتا اور اس لئے
 ہم اس کو آئندہ کے لئے چھوڑتے ہیں (بار ہواں باب)۔

عام مثالیں

(۱۸۵)

۱۔ ثابت کرو کہ ایک انجن کی ایسی طاقت جو اس میل فی گھنٹہ کی چال سے
 س پاؤنڈ کی مزاحمت پر غالب آتا ہے حسب ذیل ہے:

س میں ۳۷۵

۲۔ ایک ٹرین معہ حراکہ (انجن) ۵۰۰ ٹن وزنی ہے۔ اس کو میل
 فی گھنٹہ کی ایکساں شرح سے ہمواری پر متحرک رکھا گیا ہے، ہوا کی مزاحمت، رگڑ وغیرہ
 ۲۰ پونڈ فی ٹن ہیں۔ انجن کی ایسی طاقت معلوم کرو۔

اس ایسی طاقت میں کتنا اضافہ ہونا چاہئے کہ اس کی شرح تو وہی
 رہے لیکن اس کے ساتھ ہی ٹریوں کے درمیانی حصہ کا پانی اس طور پر اوپر اٹھایا
 جائے کہ طے شدہ فاصلہ کے ہر فٹ پر اٹھائے ہوئے پانی کی مقدار ۲۰ پونڈ ہو
 اور جس ارتفاع تک پانی اٹھایا گیا ہے وہ ۱۰ فٹ ہو۔ وہ توانائی بالحرکت جو
 ٹریوں کے درمیانی حصہ کا پانی حاصل کرتا ہے اور وہ توانائی بالحرکت جو اٹھائے ہوئے
 پانی کی (بلحاظ ٹینک کے) ہے نظر انداز کر دی گئی ہے۔

۳۔ ایک مخروطی پہاڑی کے رخ ایسی شکل کے ہیں کہ ایک معلوم کمیت
 ان پر بغیر پھسلے عین ٹھہر سکتی ہے۔ ایک شخص چاہتا ہے کہ اس کمیت کو
 پہاڑی کے دامن کے ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک جو قبل الذکر نقطے کے
 متقاطع ہے حرکت دے۔ ثابت کرو کہ کمیت کو پہاڑی کے اوپر کھینچنے میں جو کام
 کرنا پڑتا ہے وہ اس کام سے جو اس کو پہاڑی کے دامن کے گرد کھینچنے میں کرنا پڑتا ہے

نسبت ۲:۱ میں کم ہے۔

۴۔ ثابت کر دو کہ وہ کام جو ایک شخص ایک وزن کو پہاڑی کے اوپر ایک معلوم نقطہ ۱ سے چوٹی ۲ تک کھینچنے میں انجام دیتا ہے صرف ۱ اور ۲ کے مقامات پر منحصر ہوتا ہے اور پہاڑی کی شکل پر منحصر نہیں ہوتا بشرطیکہ وہ ہمیشہ ۱ اور ۲ میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی میں وزن کو کھینچے۔

۵۔ ایک لچکدار رسی کے دوسروں کو شکل ۷ کے لکڑی کے ایک ٹکڑے کی دو شاخوں سے باندھ کر ایک منجیق بنائی گئی ہے، رسی کا طبعی طول ۱ ہے اور لچک کا مقیاس ۱ ہے اور لکڑی کی شاخیں ایک دوسرے سے فاصلہ ۱ پر ہیں اور ۱ سے بڑا ہے منجیق کے وسطی نقطہ پر کمیت ک کا ایک پتھر رکھا گیا اور اسے پیچھے کی جانب کھینچا گیا یہاں تک کہ رسی کا طول تن کر اپنے طبعی طول کا دوگنا ہو گیا۔ اب اگر اس کو آزاد چھوڑ دیا جائے تو معلوم کرو کہ وہ کس رفتار سے منجیق سے نکلے گا۔

۶۔ مثال ۵ میں اگر پتھر کو انتصایا اوپر وار پھینکا جائے تو وہ ساکن ہونے سے پیشتر کتنی بلندی تک چڑھے گا۔

۷۔ کمیت ک کا ایک ہارمنکوں سے بنایا گیا ہے جو ایک تاگے میں جس کی لچک کا مقیاس ۱ ہے پڑوئے گئے ہیں۔ اس کو ایک چلنے قائم مستدیر مخروط کی سطح پر جس کا زاویہ راس ۲۰° اور محور انتصابی ہے اس طرح سہارا گیا ہے کہ ہار ایک افقی مستوی میں ہے اور تاگہ تنا ہوا نہیں ہے۔ اگر ہار کو چھوڑ دیا جائے تو وہ ساکن ہونے سے پیشتر مخروط کے نیچے کتنا پھسلے گا۔

۸۔ ایک اڑ پھیہ کا نصف قطر ۲ فٹ ۶ انچ ہے اور آروں وغیرہ کا وزن کور (Rim) کے مقابلہ میں نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ پھیہ ایک ثابت محور کے گرد فی منٹ ۵۰ گردشوں کی شرح سے گھوم رہا ہے، محور کا قطر ۳ انچ ہے اور پھیہ اور محور کے درمیان رگڑ کی قدر ۱/۲ ہے۔ اگر اس کو آزاد چھوڑ دیا جائے تو رکنے سے قبل وہ کتنی گردشیں کرے گا۔

۹۔ ایک مکڑی چھت سے ایک تاگے کے ذریعہ جس کی لچک کا مقیاس

اُس کے وزن کے مساوی ہے لٹک رہی ہے۔ ثابت کرو کہ وہ چھت تک اتنا کام کر کے چڑھ سکتی ہے جو اُس کام کا صرف تین چوتھائی ہے جو مطلوب ہوتا اگر تاگا لچکدار نہ ہوتا۔

۱۔ ایک مہین تاگے کے دو سروں سے دو مساوی وزن ف باندھ کر اس کو دو چکنی کھونٹیوں پر جو ایک ہی افقی خط میں ایک دوسرے سے ۲۱ فاصلہ پر ہیں لٹکایا گیا ہے۔ پھر کھونٹیوں کے درمیان تاگے کے حصہ کے وسطی نقطہ پر کمیت ق باندھ کر اس کو جاذبہ کے تحت نیچے اترنے چھوڑ دیا گیا۔ ثابت کرو کہ اس کی رفتار گہرائی لا تک گرنے کے بعد سب ذیل ہوگی :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ ج } (لا + لا) (ق لا + 2 \text{ ف } 1 - 2 \text{ ف } لا + لا) \\ 2 \text{ ق } (لا + لا) + 2 \text{ ف } لا \end{array} \right\}$$

۱۱۔ اگر یہ تسلیم کیا جائے کہ زمین کی بیرونی جانب کسی جسم پر زمین کی کشش اس فاصلہ کے بالعکس متناسب ہے جو زمین کے مرکز اور جسم کے درمیان ہے تو معلوم کرو کہ زمین کی سطح سے ایک گولی کو انتصاباً اوپر وار کس رفتار سے فائر کرنا چاہیے کہ وہ کبھی زمین پر واپس نہ آ سکے۔

۱۲۔ ایک بھاپ ہتھوڑی جس کا وزن ۳۰ ٹن ہے کچھ تو اپنے وزن سے اور کچھ اس بھاپ کے دباؤ سے نیچے دبائی جاتی ہے جو ایک انتصابی اسطوانہ میں ایک فشارہ پر جو ہتھوڑی کے ساتھ حرکت کرتا ہے عمل کرتا ہے۔ فشارہ کا رقبہ چار مربع فٹ ہے اور بھاپ کا دباؤ ۲۲۵ پونڈ فی انچ ہے۔ اگر ہتھوڑی کو اپنے بلاک سے ۲ فٹ اوپر اٹھایا جائے اور چھوڑ دیا جائے تو وہ رفتار معلوم کرو جس کے ساتھ وہ بلاک سے ٹکرائے گی۔

۱۳۔ طول ل کے ایک یکساں ڈنڈے کے سروں سے طول لا کی ایک ڈوری باندھی گئی ہے جو ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے۔ ثابت کرو کہ ڈنڈا صرف افقی یا انتصابی محل میں لٹک سکتا ہے ان محلوں کی قائمیت یا غیر قائمیت کا امتحان کرو۔

۱۴۔ دو مساوی یکساں ڈنڈوں کو استوار طریقہ سے انگریزی حرف ل کی شکل میں جوڑا گیا ہے اور پھر ان کو نصف قطر لا کے ایک چکنے مستدیر اسطوانے پر سوار کیا گیا،

ڈنڈوں کا وہ چھوٹے سے چھوٹا طول معلوم کرو جو توازن کی قائمیت کے مطابق ہو اگر
ڈنڈے ایک انتصابی مستوی میں جو اسطوانے کے طول پر عمود ہے رہنے کے لیے
مقید ہوں۔

۱۵۔ ایک پتھر کا مکعب جس کے کنارے کا طول ۱ ہے قطر ب کے ایک
کھردرے دائری کندے پر متشاکلاً ٹکا ہوا ہے اور اس کا قاعدہ کندے پر افتاق ہے۔
ثابت کرو کہ توازن قائم یا غیر قائم ہے بموجب اس کے کہ $b < 1$ یا $b > 1$ ۔

۱۶۔ ایک جھونکنے والا پتھر ایک ثابت پتھر پر ٹکا ہوا ہے، تماس کھردرا ہے
اور نقطہ تماس پر کا مشترک عماد انتصابی ہے۔ اگر نقطہ تماس پر ان پتھروں کی سطحوں کے
نصف قطر انحناء غہ اور غہ ہوں اور اگر حرکت پذیر پتھر کے مرکز ثقل کا ارتفاع f
ہو تو ثابت کرو کہ جھونکنے والے پتھر کا توازن قائم یا غیر قائم ہو گا بموجب اس کے کہ

$$\frac{1}{f} < \text{یا} > \frac{1}{\text{غہ}} + \frac{1}{\text{غہ}}$$

۱۷۔ طول l اور وزن w کی ایک سیڑھی ایک کھردرے فرش پر انتصابی
محل میں اس طرح کھڑی ہے کہ ایک لچکدار دوری اس کے سب سے اونچے نقطہ سے
اور چھت کے ایک ایسے نقطہ سے بندھی ہے جس کا ارتفاع فرش کے اوپر b ہے
اور دوری کا تناؤ t ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم یا غیر قائم ہے بموجب اس کے کہ

$$t < \text{یا} > \frac{w(b-l)}{b}$$

۱۸۔ اگر مثال ۱۷ میں تناؤ $w(b-l)$ b کے مساوی ہو تو معلوم کرو کہ
توازن قائم ہے یا غیر قائم۔

۱۹۔ اگر مثال ۱۶ میں ڈنڈے فاصل طول کے ہوں جو قائمیت کو غیر قائمیت
سے منفصل کرتا ہے تو ثابت کرو کہ توازن تعدیلی ہے اور اس لیے ڈنڈے بعض
خاص حدود کے اندر کسی محل میں اس مستوی میں ساکن رہ سکتے ہیں جو اسطوانہ کے
محور پر عمود ہے۔

۲۰۔ ثابت کرو کہ مثال ماضی کے ڈنڈے ان ہٹاؤں کے لحاظ سے قائم

توازن میں ہیں جن میں ڈنڈوں کا مستوی ایک انتصابی محور کے گرد گھومتا ہے،
اور وہ جفت معلوم کرو جو ڈنڈوں کو ایسے محل میں رکھنے کے لیے مطلوب ہے
جس میں مستوی، اسطوانے کے محور کے ساتھ کوئی معلومہ زاویہ طہ بنائے۔
۲۱۔ مثال ماضی میں ڈنڈوں کا وہ چھوٹے سے چھوٹا طول معلوم کرو کہ تمام
ممکن ہٹاؤں کے لیے توازن قائم ہو سکے۔

۲۲۔ سخت اُبلے ہوئے انڈے کے چپے اور نوکدار سروں پر نصف قطر
انحناء علی الترتیب ۱ اور ۲ ہیں اور انڈے کو ایک کھردرے افقی سطح پر اس کے
چپے سرے کے بل عین متوازن کھڑا کیا جاسکتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کو اس کے
نوکدار سرے پر ایک نیم کروی برتن کے اندر جس کا نصف قطر

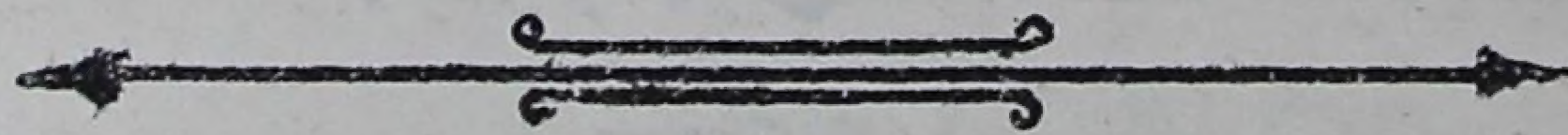
ب (ج - ۱)

ج - ب - ۱

سے کم ہو متوازن کھڑا کیا جاسکتا ہے جہاں ج انڈے کے طول ترین محور کا طول
ہے۔ اگر برتن کا نصف قطر فاصل طول کے عین مساوی ہو تو معلوم کرو کہ توازن
قائم ہوگا یا غیر قائم۔

۲۳۔ تین متساوی الفصل حکینی کھونٹیاں ۱، ۲، ۳ ایک ہی افقی
خط میں ہیں اور ایک وزندار یکساں دوری کے سرے ۱ اور ج سے بندھے
ہیں اور دوری کو ب پر حلقہ بناتے ہوئے گزارا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ جب
زنجیرے ۱، ۲، ۳ ج نامساوی ہوں تو یہ ہو سکتا ہے کہ توازن کا کوئی محل
ہو یا نہ ہو اور اگر ایسا کوئی محل ہے تو یہ توازن قائم ہوگا۔

نیز ثابت کرو کہ توازن کا وہ محل جس میں دوری کا وسطی نقطہ ب پر ہے
غیر قائم یا قائم ہے بموجب اس کے کہ توازن کا غیر متشاکل محل موجود یا غیر موجود ہو۔



اٹھوال باب

(۱۸۸)

مستقل قوتوں کے تحت ذرہ کی حرکت

۱۵۴۔ کسی واحد ذرہ کی حرکت کی سادہ ترین مثال اُس وقت واقع ہوتی ہے جبکہ ذرہ صرف مستقل قوتوں کے زیر عمل ہو اور ایک خط مستقیم میں حرکت کرے۔

اگر ذرہ کی حرکت کی سمت میں قوت کا جزو ترکیبی F ہے تو حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے اسراع E مساوات

$$F = kE$$

سے حاصل ہوگا جہاں k 'ذرہ کی کثیت' ہے۔ چونکہ بموجب فرض قوتیں

مستقل ہیں اسراع E بھی مستقل ہے۔

فرض کرو کہ ذرہ رفتار u سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور مستقل اسراع E کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ وقت t میں رفتار میں اضافہ Et ہے اور اس لیے وقت t کے بعد کل رفتار $u + Et$ ہے۔ اس رفتار کو w سے تعبیر کرو تو

$$w = u + Et \dots \dots \dots (۲۴)$$

تعریف کی بموجب $w = \frac{فرس}{وقت}$ جہاں s 'وہ فاصلہ ہے جو حرکت

کی ابتداء سے طے ہوا ہے۔ اس لیے

$$\frac{فرس}{فرت} = \frac{ع + ۶}{ت}$$

اس مساوات سے کسی لمحہ پر س کے اضافہ کی شرح معلوم ہوتی ہے۔ اس کا تکمل کرنے سے

$$(۲۵) \quad س = ۶ت + \frac{۱}{۲} ع ت^۲$$

تکمل کے مستقل کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ وقت $ت = ۰$ پر فاصلہ طے شدہ (حسب تعریف) س صفر ہونا چاہئے۔

مساوات (۲۴) سے $۶ = ۰ - ع$ اور اس لیے مساوات (۲۵) لکھی جاسکتی ہے

$$(۲۶) \quad س = ۰ت - \frac{۱}{۲} ع ت^۲$$

(۱۸۹) اس مساوات سے وقت $ت$ میں طے شدہ فاصلہ معلوم ہوتا ہے جبکہ رفتار و معلوم ہو جہاں و فاصلہ طے شدہ کے ختم پر ذرہ کی رفتار ہے۔ مساواتوں (۲۵) اور (۲۶) کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(۲۷) \quad س = \frac{۱}{۲} (۰ + ع) ت$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ فاصلہ طے شدہ عرت اور و ت کا اوسط حسابی ہے، عت وہ فاصلہ ہے جو طے ہوتا اگر ذرہ اپنی ابتدائی رفتار و پورے وقت $ت$ میں قائم رکھتا اور و ت وہ فاصلہ ہے جو طے ہوتا اگر ذرہ اپنی آخری رفتار و پورے وقت $ت$ میں قائم رکھتا۔

مساوات (۲۷) کو شکل

$$عت = (۰ - ۶)$$

میں رکھو اور $ت$ کو اس مساوات اور مساوات (۲۷) سے ساقط کرو تو حاصل ہوگا

$$(۲۸) \quad ۲ع = ۰ - ۶$$

یہ وہ مساوات ہے جو طے شدہ فاصلہ کو ابتدائی اور آخری رفتاروں کے ساتھ مربوط کرتی ہے۔

یہ آخری مساوات توانائی کی مساوات سے بھی حاصل کی جاسکتی ہے۔
چونکہ ذرہ پر جو کام ہوا ہے وہ اس کی توانائی بالحرکت کی تبدیلی کے مساوی
ہے اس لیے

$$F \cdot s = \frac{1}{2} k v^2 - \frac{1}{2} k v_0^2$$

اور چونکہ $F = k \cdot x$ اس لیے مساوات (۲۸) فوراً حاصل ہو جاتی ہے۔

جسم جو جاذبہ کے تحت گرے

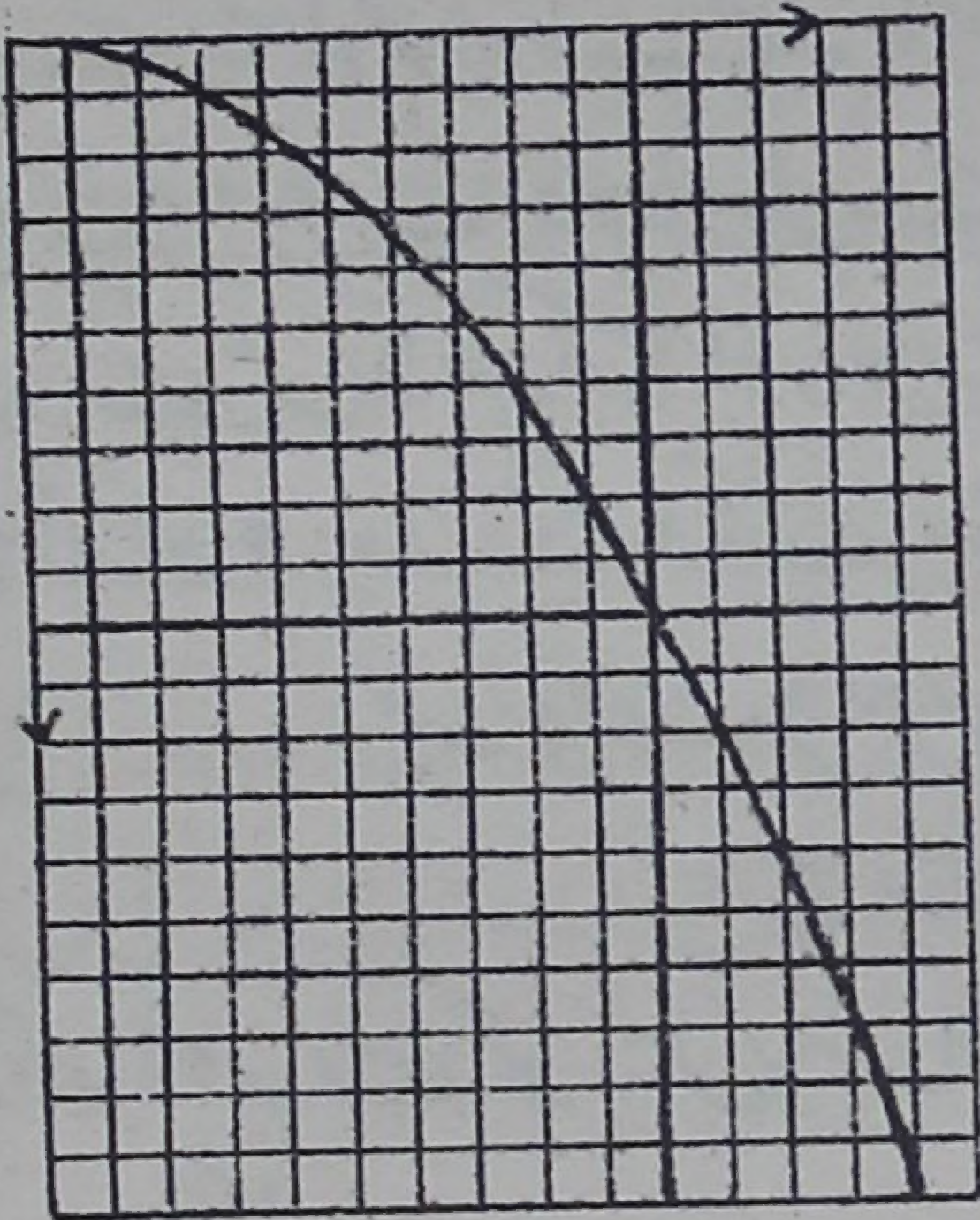
۱۵۵۔ ان مساواتوں کا سادہ ترین اطلاق اس صورت پر ہوتا ہے
جبکہ کوئی جسم جاذبہ کے زیر اثر آزادانہ گر رہا ہو، اس صورت میں اسراع g ہے
اگر جسم سکون سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے تو ہم $v_0 = 0$ رکھتے ہیں
اور s کو انتصائباً نیچے وارپیمائش کرتے ہیں۔ مساوات (۲۵) سے معلوم
ہوگا کہ وقت t کے ختم پر جسم نے فاصلہ $\frac{1}{2} g t^2$ طے کیا ہے
اور اس کی رفتار $g t$ ہے۔ فاصلہ F تک گرنے پر اس کی رفتار حسب
مساوات (۲۸) $\frac{1}{2} g t^2 = F$ کے مساوی ہے۔ اس کو بالعموم یوں بیان
کرتے ہیں کہ وہ ”رفتار بوجہ ارتفاع

F ہے“ ہم دیکھتے ہیں کہ طے شدہ

فاصلہ اس وقت کے مربع کے
متناسب ہے جس میں جسم گرتا رہا۔
شکل (۱۰۳) میں وقت کو افقی
پیمائش کیا گیا ہے اور فاصلہ طے
شدہ کو انتصائباً۔ جلی منحنی سے فاصلہ
طے شدہ کی ترسیمی تعبیر حاصل ہوتی
ہے۔ افقی فاصلہ کو l سے اور

شکل (۱۰۳)

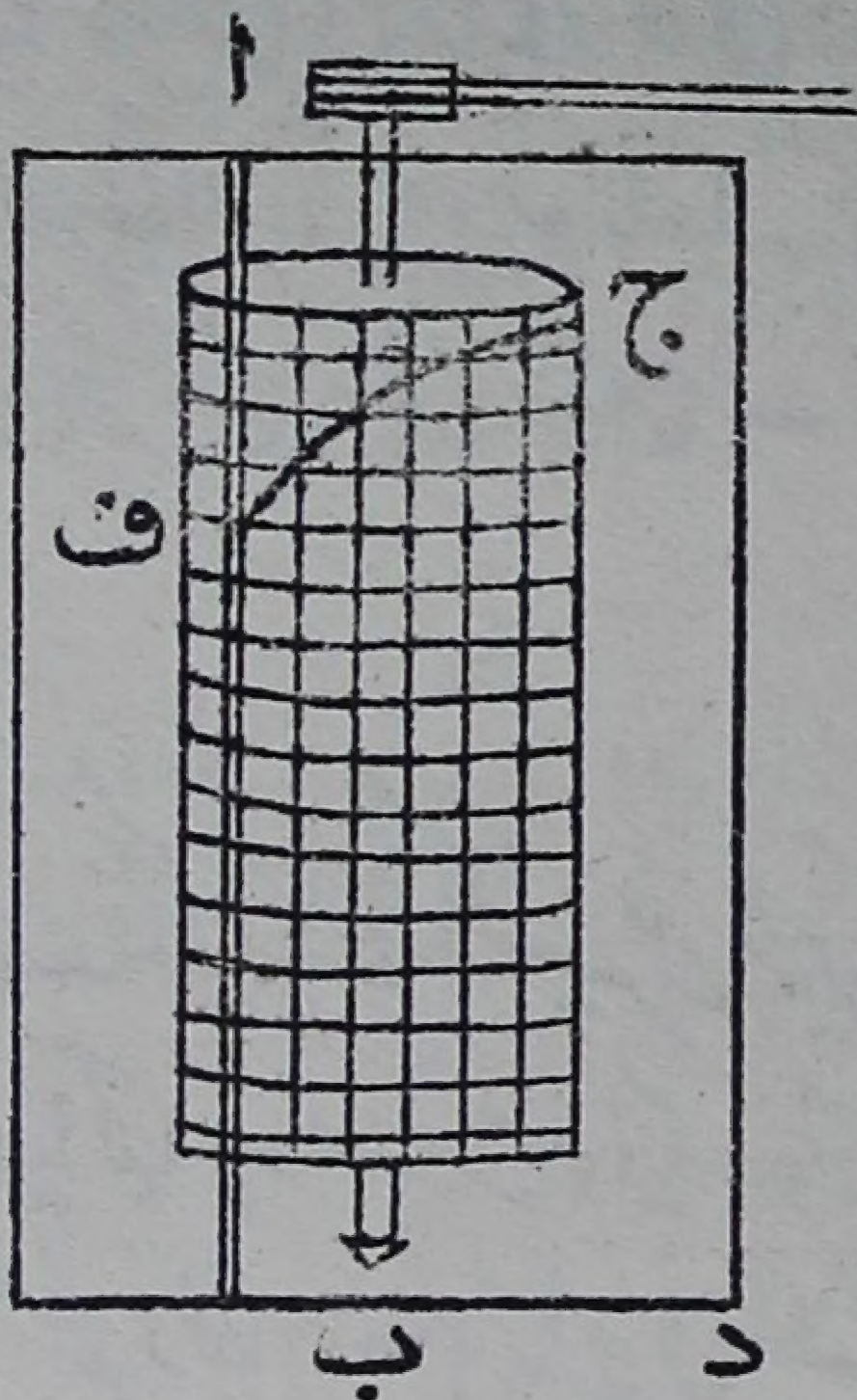
انتصائبی فاصلہ کو y سے تعبیر کیا جائے تو $l = t$ اور $y = \frac{1}{2} g t^2$ اور



اور اس لیے

$$ما = \frac{1}{p} ج لا$$

۱۵۶۔ یہ ایک قطع مکانی کی مساوات ہے۔ اس ترسیم کو تجرباً اس طریقہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے جو مارین (Morin) کا طریقہ کہلاتا ہے۔ وزن ف ایک سوراخ میں جو ایک ڈنڈے (ب) میں بنایا ہوا ہوتا ہے انتصایا کرنے میں آزاد ہوتا ہے اور یہ انتظام کیا جاتا ہے کہ جب وہ گرتا ہے تو



شکل (۱۰۴)

اس سے لگی ہوئی ایک پینسل دھول ج د پر جس میں کاغذ لگا ہوا ہوتا ہے نشان ڈالتی جاتی ہے۔ دھول کو یکساں طور پر گھمایا جاتا ہے۔ کاغذ کو دھول سے جدا کر لینے پر شکل (۱۰۳) کی ترسیم حاصل ہوتی ہے کیونکہ افقی فاصلہ وقت کے متناسب ہوتا ہے اور انتصائی فاصلہ وہ فاصلہ ہوتا ہے جس میں سے وزن گرتا ہے۔ یہ واقعہ کہ اس

طریقہ سے حاصل شدہ منحنی ٹھیک طور پر مکانی ہوتا ہے اس حقیقت کا تجربی ثبوت ہے کہ جاذبہ کے تحت حرکت یکساں اسراع کی حرکت ہوتی ہے۔ ۱۵۷۔ اگر جسم کو انتصایا اوپر وار رفتار سے پھینکا جائے تو فاصلہ س کی پیمائش انتصایا اوپر وار ہو سکتی ہے اور اس سمت میں اسراع ج ہوگا۔ چنانچہ حاصل ہوگا

$$س = عت - \frac{1}{p} ج ت^2$$

$$و = ع - ج ت$$

$$ج س = ع^2 - و^2$$

جہاں س وہ فاصلہ ہے جو وقت ت میں اوپر وار طے ہوا ہے اور و اوپر وار

رفتار ہے پہلی مساوات سے ہم دیکھتے ہیں کہ $s =$ نہ صرف اس وقت جبکہ $t =$ بلکہ اس وقت بھی جبکہ $t = \frac{62}{ج}$ - اس لیے ذرہ اپنے ابتدائی

مقام پر وقت $\frac{62}{ج}$ کے بعد واپس پہنچتا ہے - جب $s =$ تو تیسری مساوات سے $62 = v$ حاصل ہوتا ہے اس لیے جب ذرہ اپنے ابتدائی مقام پر واپس آتا ہے تو اس کی رفتار وہی ہوتی ہے جویہاں سے نکلتے وقت اس کی تھی - صریحاً ایسا ہی ہونا چاہئے کیونکہ توانائی یا لقوہ وہی ہوتی ہے اور اس لیے توانائی یا حرکت بھی وہی -

مثالیں

۱۔ اگر ایک اکسپرس ٹرین کو دو حصوں میں جدا کر کے نصف اول کو ۵ منٹ قبل چلا دیا گیا ہو اور ٹرین ایک میل تک مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کرنے کے بعد اپنی اعظم رفتار ۴۸ میل فی گھنٹہ حاصل کرے تو ثابت کرو کہ یہ دو نصف حصے ایک دوسرے سے ۴ میل کے فاصلہ سے حرکت کریں گے لیکن نصف اول نصف دوم کے نکلتے سے پیشتر ۳ میل جا چکا ہوگا -

۲۔ ایک ٹرین دوسری ٹرین سے جو متوازی ٹریکوں پر دوڑ رہی ہے گزر جاتی ہے، اول الذکر کی رفتار ۴۵ میل فی گھنٹہ اور اسراع ایک فٹ فی ثانیہ ہے، دوسری کی رفتار ۳۰ میل فی گھنٹہ اور اسراع ۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہے - یہ دوسری ٹرین پھر کب پہلی ٹرین کو ملا لے گی اور اس اثنا میں دونوں کتنا فاصلہ طے کر چکی ہوں گی -

۳۔ ایک جسم کو ایک غبارے سے جو زمین سے ۱۰ فٹ اونچا ہے گرایا گیا ہے - اس کی رفتار زمین پر پہنچنے پر معلوم کرو اگر غبارہ ۳۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے (۱) چڑھ رہا ہو (ب) اتر رہا ہو -

۴۔ ایک پتھر کو ایک کنویں میں چھوڑا گیا تو پانی سے ٹکرانے کی آواز ۹ ثانیہ بعد

کنویں کے سرے پر سُنائی دی۔ کنویں کی گہرائی معلوم کرو اگر آواز کی رفتار ۱۱ فٹ فی ثانیہ ہو۔

۵۔ ایک آلہ بار بردار ۵ فٹ فی ثانیہ کے اسراع سے نیچے اُترتا ہے یہاں تک اس کی رفتار ۳۰ فٹ فی ثانیہ ہو جاتی ہے اور اس کے بعد اس کی رفتار مستقل رہتی ہے۔ اُترنا شروع کرنے کے ۶ ثانیہ بعد ایک پتھر اُس نقطہ سے جہاں سے وہ چلا تھا اس پر گرایا جاتا ہے۔ پتھر کس قدر جلد اُس سے جا لگے گا۔

۶۔ ایک بازیگر تین گولوں کو ایک ہاتھ سے اس طرح اُچھالتا ہے کہ کسی آن دو گولے ہوا میں رہتے ہیں اور ایک اُس کے ہاتھ میں۔ اگر ہر گولہ ۴ فٹ تک اونچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ وقت جس میں ایک گولہ اُس کے ہاتھ میں رہتا ہے $\frac{1}{4}$ ثانیہ ہے۔

۷۔ یہ مشاہدہ کیا گیا کہ ایک جسم جہاز کے دروازہ کے راستہ سے اس کے پیٹے کی تہ تک گرنے میں جو گ فٹ گہرا ہے ت ثانیے لیتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ فاصلہ

$$\frac{1}{2}g \left(\frac{1}{2}t + \frac{g}{t} \right) \text{ فٹ}$$

میں سے گرتا ہے اور رفتار

$$\frac{g}{t} + \frac{1}{2}gt \text{ فٹ فی ثانیہ}$$

سے تہ پر ٹکراتا ہے۔

۸۔ ۱۲ فٹ لمبی زنجیر اپنے اوپر کے سرے سے لٹک رہی ہے۔ اگر اس

سے کو چھوڑ دیا جائے تو وہ وقت معلوم کرو جو زنجیر ایک نقطہ سے جو ابتدائی محل کے بلند ترین نقطہ سے ۶۰ فٹ نیچے ہے گزرنے میں لے گی۔

۹۔ ایک جسم جس کی کمیت ۵ پونڈ ہے اور جو ۱۶۰ فٹ فی ثانیہ کی

چال سے حرکت کر رہا ہے دفعتاً ایک مستقل مزاحمت کے مقابل ہوتا ہے

جو $\frac{1}{4}$ پونڈ وزن کے مساوی ہے، یہ مزاحمت اس وقت تک رہتی ہے کہ

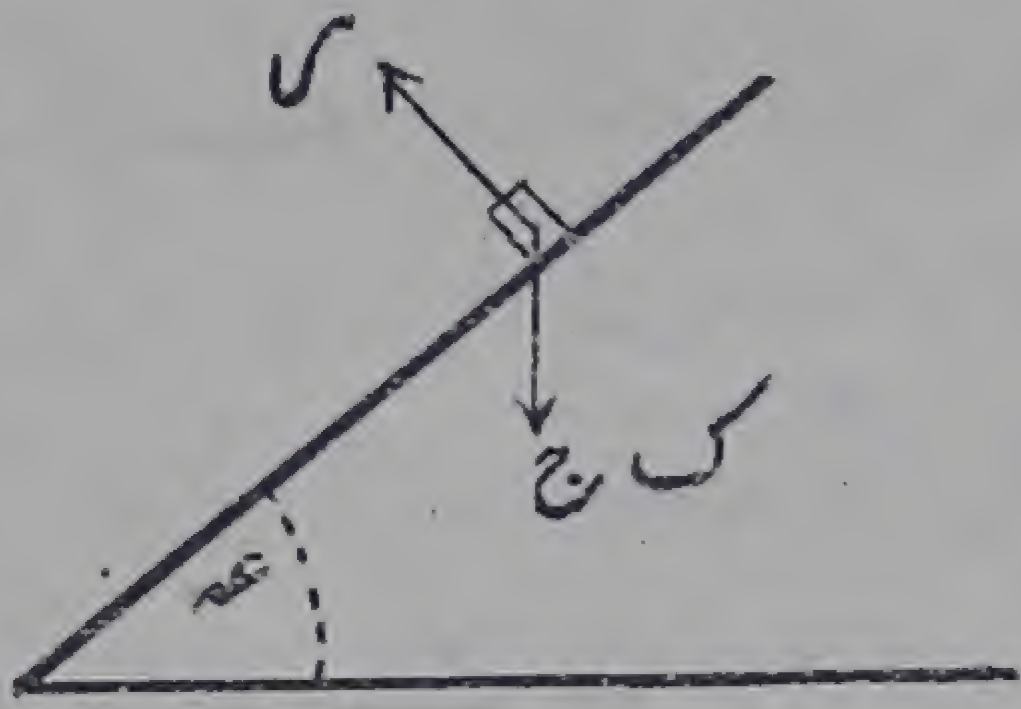
اس کی رفتار ۹۶ فٹ ہو جاتی ہے۔ کتنی دیر تک اور کتنے فاصلہ تک مزاحمت عمل کرتی ہے۔

۱۰۔ مال کے دو ڈبے باہم جوڑے گئے ہیں اور انہیں افقی پٹریوں پر ایکساں قوت سے کھینچا گیا ہے چنانچہ وہ سکون سے حرکت کر کے پہلے دس ثانیوں میں ۱۰۰ فٹ کا فاصلہ طے کرتے ہیں۔ اس کے بعد پچھلے ڈبے کو جدا کیا گیا تو معلوم ہوا کہ دوسرے دس ثانیوں میں ان دو ڈبوں کے درمیان فاصلہ ۱۵۰ فٹ ہے۔ ڈبوں کی کمیتوں کا مقابلہ کرو جبکہ ہوا وغیرہ کی کل مزاحمت نظر انداز کر دی گئی ہو۔

۱۱۔ ایک غبارہ جس کا وزن ۱۰ ہے اسراع a سے چڑھ رہا ہے۔ اگر اس میں سے وزن w کی ریت نکال لی جائے تو غبارے کے اسراع میں اضافہ معلوم کرو جبکہ ہوا کی مزاحمت اور ریت کا تیراؤ نظر انداز کئے گئے ہوں۔

مال مستوی پر حرکت

۱۵۸۔ فرض کرو کہ ہم ایک ذرہ کو ایک مال مستوی پر نیچے پھسلنے دیتے ہیں جبکہ ان دو کے درمیان تماس کاٹل چکنا تسلیم کر لیا گیا ہو۔ اگر ذرہ کی کمیت m ہے تو اس پر عمل کرنے والی



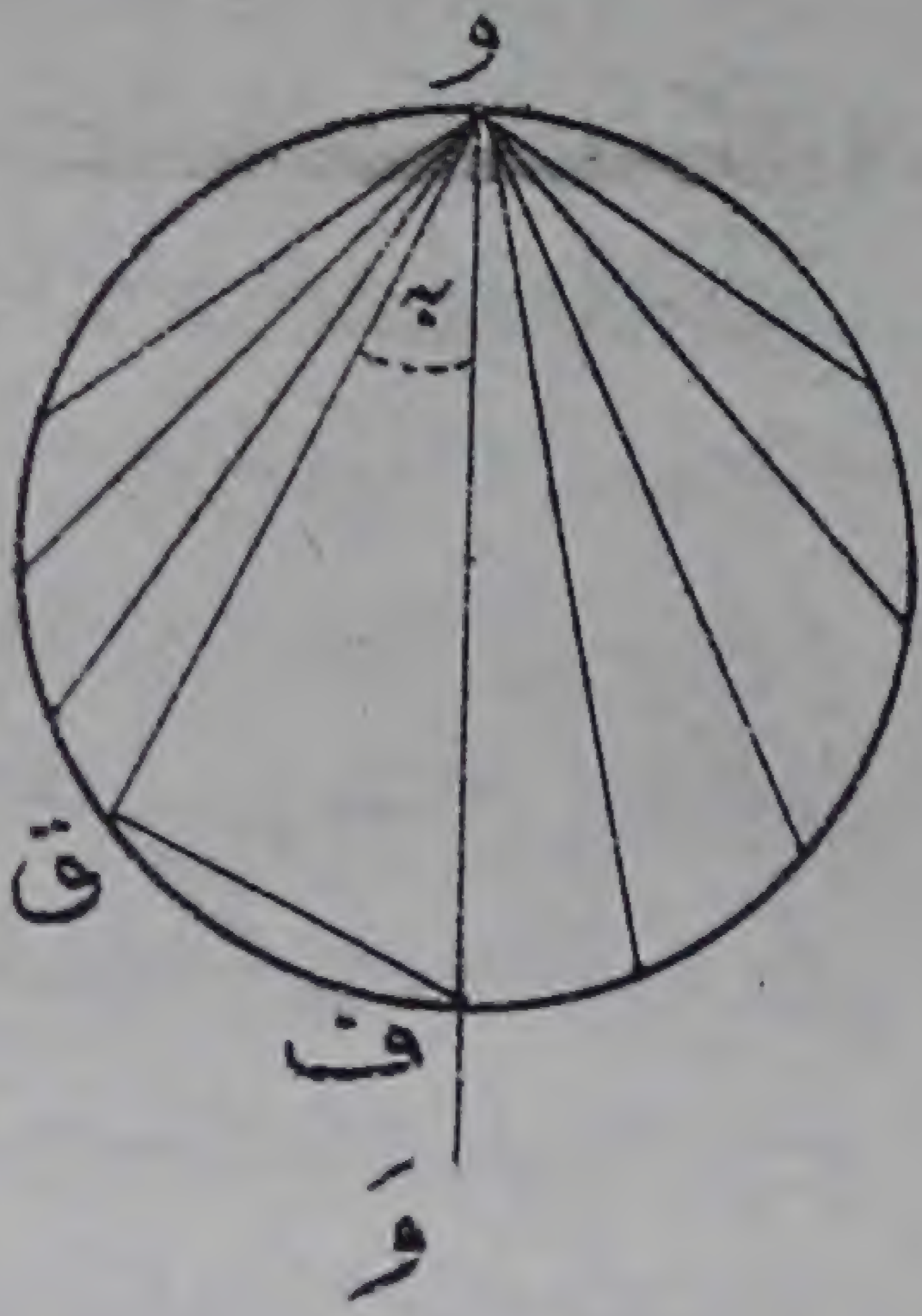
قوتیں دو ہیں، اس کا وزن mg اور تعادل سے جو مستوی پر عمود ہے۔ وزن کا جزو ترکیبی مستوی کے نیچے وار $mg \sin \alpha$ جب $mg \cos \alpha$ ہے اور اس لیے ذرہ یکساں اسراع $g \sin \alpha$ جب $mg \cos \alpha$ سے حرکت کرتا ہے۔

شکل (۱۰۵)

وقت t میں جو فاصلہ طے ہوتا ہے اس کو معمولی ضابطوں سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اگر ذرہ حالت سکون سے حرکت کرنا شروع کرے تو وقت t میں وہ فاصلہ $\frac{1}{2} g \sin \alpha t^2$ جب $mg \cos \alpha$ طے کرے گا۔

۱۵۹۔ فرض کرو کہ نقطہ O سے بہت سے چکنے تار جن میں چکنے منکے آزادانہ

بھسل سکتے ہیں لگائے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ یہ تار سمت انتصابی کے ساتھ تمام ممکن (۱۹۳)

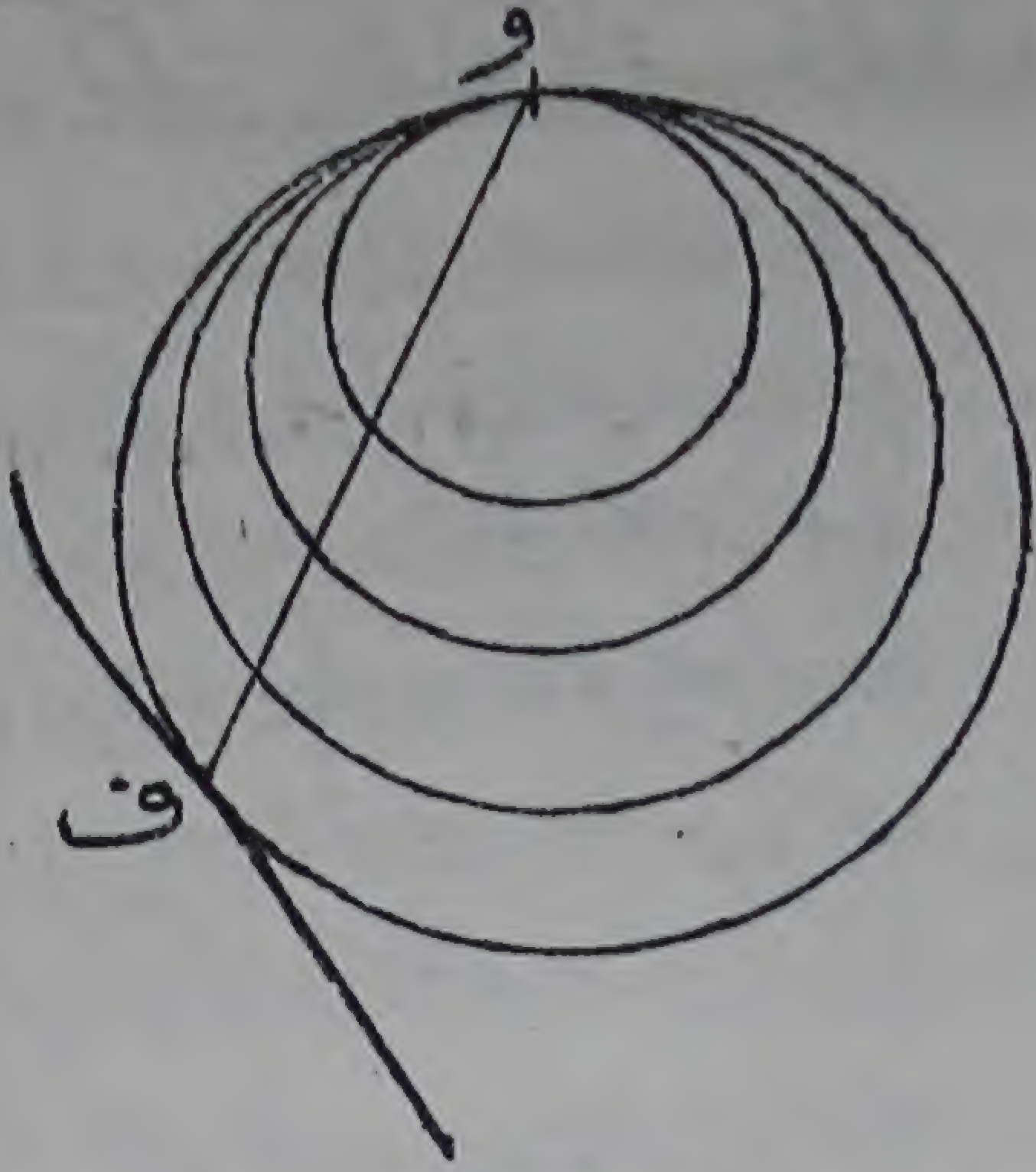


شکل (۱۰۶)

زاوے بناتے ہیں اور ان میں سے ایک تار و انتصابی ہے۔ خیال کرو کہ سب منکے نقطہ و پر جمع ہیں اور ایک ساتھ چھوڑے گئے ہیں۔ وقت ت کے بعد فرض کرو کہ وہ منکا جو انتصاباً گر رہا ہے نقطہ ف پر ہے اور وہ منکا جو اس تار پر پھیلتا ہے جو انتصابی سے زاویہ بہ بناتا ہے نقطہ ق پر ہے۔ یہ دوسرا منکا اسراع ج حجم بہ سے حرکت کرتا ہے۔

پس و ف = $\frac{1}{4}$ ج ت^۲ اور و ق = $\frac{1}{4}$ ج حجم بہ x ت^۲ اس لیے و ق = و ف حجم بہ اور اس لیے و ق ف قائمہ زاویہ ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ق اس کرہ پر ہے جس کو قطر و ف پر بنایا گیا ہو اور صریحاً یہ ہر دیگر منکے کے لیے درست ہے۔ اس طرح کسی لمحہ پر تمام منکے اس کرہ پر ہونگے جس کا بلند ترین نقطہ و ہے اور جس کا زیر ترین نقطہ و کے نیچے $\frac{1}{4}$ ج ت^۲ فاصلہ پر ہے۔ پس جب حرکت جاری رہتی ہے تو منکے ایک کرہ بناتے ہوئے نظر آئیں گے جو جسامت میں مسلسل بڑھتا جائے گا لیکن اس کا بلند ترین نقطہ و پر ساکن رہے گا اور زیر ترین نقطہ جائزہ کے تحت آزادانہ گرتا ہوا معلوم ہوگا۔

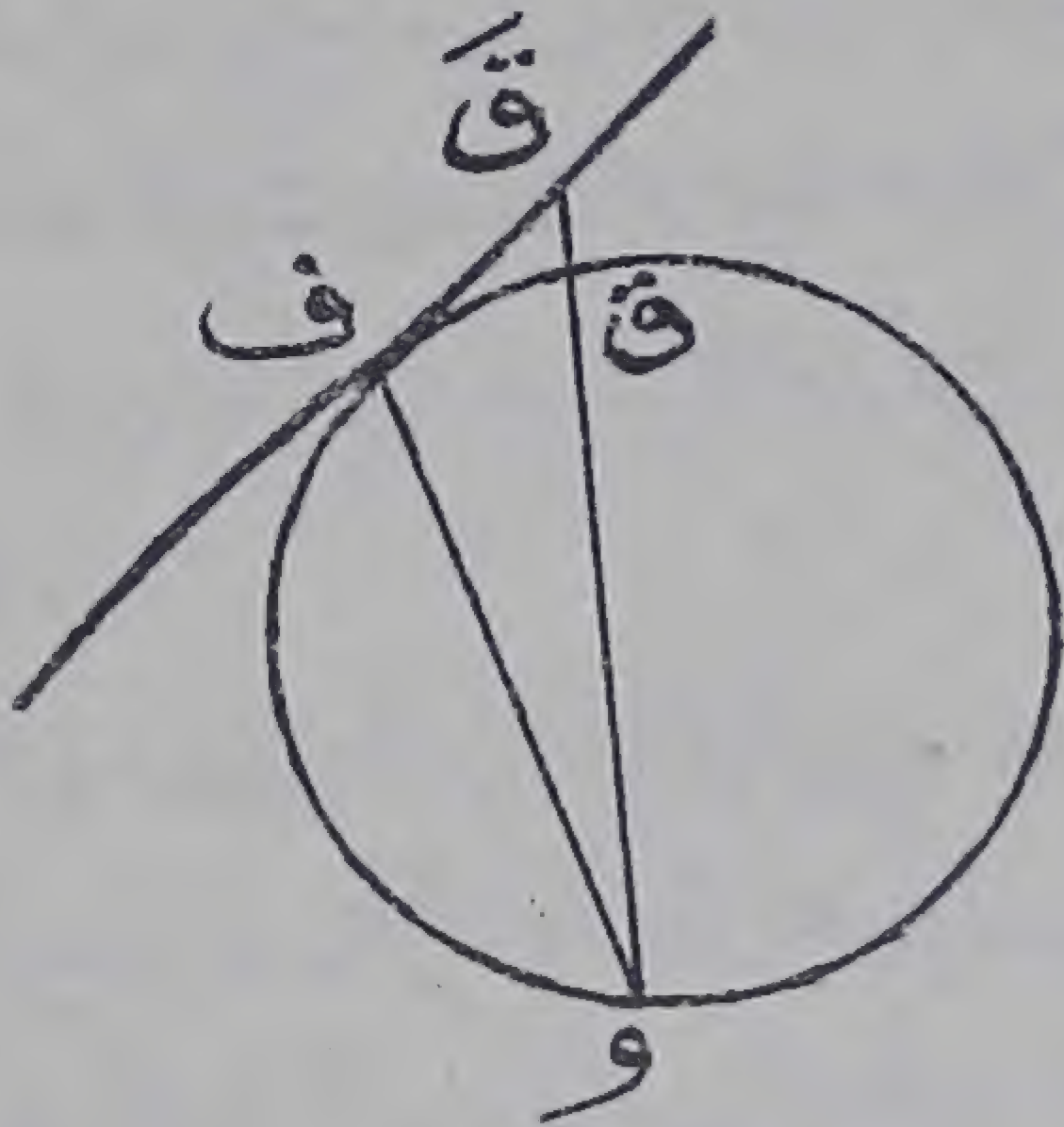
۱۶۰۔ اس خیالی تجربہ سے ایک عملی مسئلہ کو حل کرنے کا طریقہ حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم ایک چکنے مستوی یا تار کو ایسے محل میں رکھنا چاہتے ہیں کہ ایک ذرہ ایک ثابت نقطہ و سے مستوی یا تار پر نیچے گزرتے ہوئے ایک معلومہ ثابت سطح تک کم سے کم ممکن وقت میں پہنچ جائے۔ فرض کرو کہ



شکل (۱۰۷)

ہم تاروں اور منکوں کے آلہ کو وپر رکھتے ہیں اور منکوں کو ایک ساتھ چھوڑتے ہیں اور اس کرہ کی جسامت اضافہ مشاہدہ کرتے ہیں جو منکوں بنتا ہے۔ جوں ہی کرہ ایسی جسامت اختیار کرتا ہے کہ وہ ثابت سطح کو کسی نقطہ ف پر مس کرنے لگتا ہے منکوں میں سے ایک منکا اس سطح پر پہنچ چکنا ہے اور مزید بریں دوسرے منکوں کی یہ نسبت کم وقت میں پہنچ جاتا ہے۔ اس لیے اس نے و سے سطح تک وہ راستہ اختیار کیا ہے جس پر سے وہ سطح تک جلد سے جلد پہنچ جاتا ہے۔ یہ راستہ و ف ہے اور اب ہم اس راستہ کا تعین بغیر تجربہ کی تیجیل کے کر سکتے ہیں کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ وہ کرہ جس کا بلند ترین نقطہ و ہے اور جو و ف میں سے گزرتا ہے سطح کو ف پر مس کرنا چاہئے۔

اسی طرح اگر ہم وہ اقل وقت معلوم کرنا چاہیں جس میں ذرہ ایک سطح سے اس کے نیچے کے ایک ثابت نقطہ و تک حرکت کرتا ہے تو ایک ایسا کرہ معلوم کرنا ہوگا جو سطح کو نقطہ ف پر مس کرے اور اس کا ذریعہ



شکل (۱۰۸)

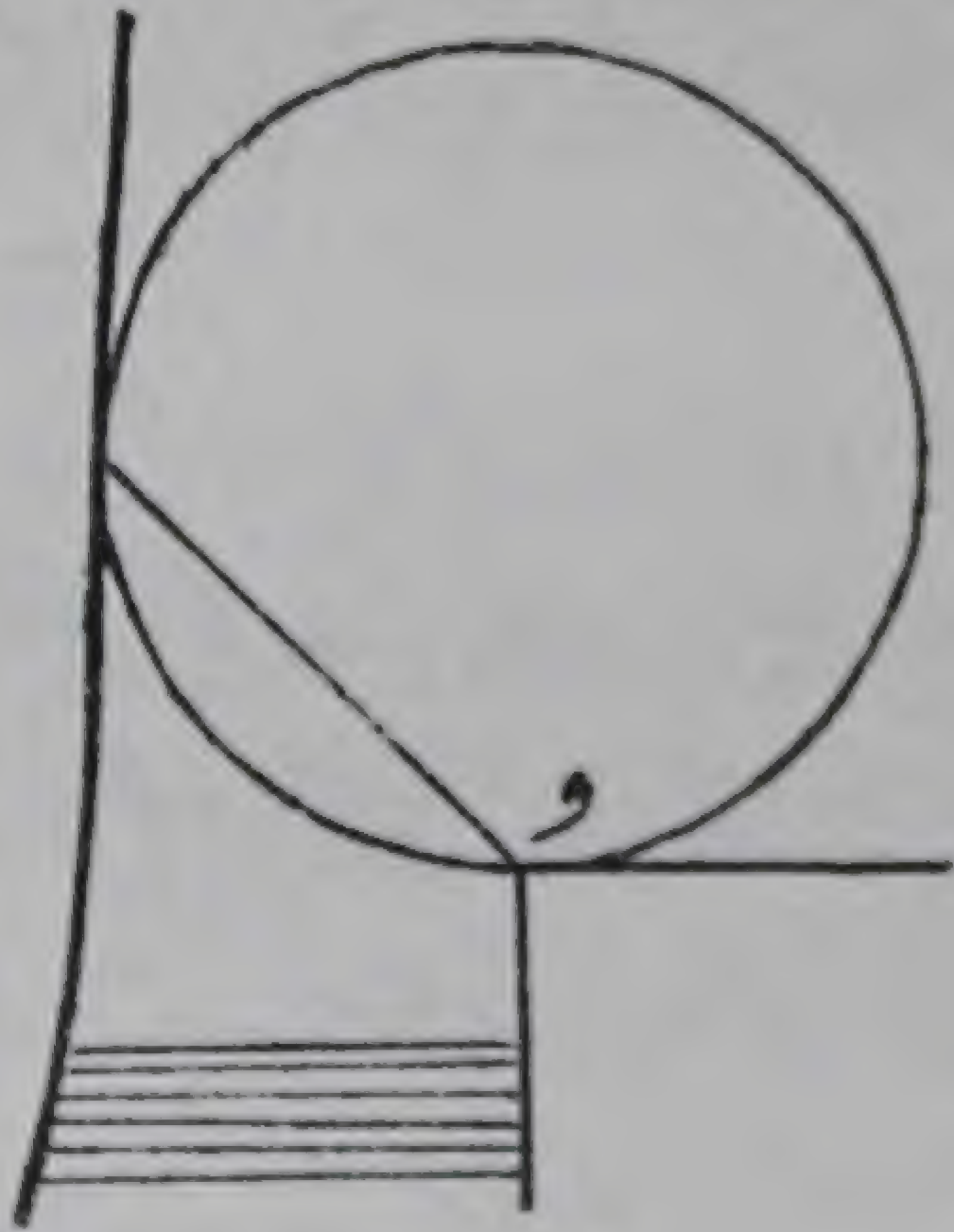
نقطہ و ہو۔ تب و ف مطلوبہ راستہ ہوگا۔ کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ اس کرہ کے ان تمام وتروں پر سے گزرنے میں جو و میں سے گھٹنے گئے ہوں جو وقت صرف ہوتا ہے ایک ہی ہے اس لیے و ف وپر

گزرنے میں جو وقت صرف ہو گا وہ اس وقت کے مساوی ہے جو کسی وتر
ق و پر سے گزرنے میں صرف ہوتا ہے اور اس لیے یہ وقت اس وقت
سے کم ہے جو سطح سے و تک پورے راستہ ق و پر سے گزرنے میں
لگتا ہے کیونکہ ق و اس راستہ کا ایک حصہ ہے۔

توضیحی مثال

ایک جہاز اپنے چبوترے سے کچھ فاصلہ پر کھڑا ہے
اور جہاز کے رخ کے کسی نقطہ پر چبوترے سے ایک تختہ
اس طرح رکھنا مطلوب ہے کہ تختہ پر جہاز سے چبوترے تک
پھسلنے کا وقت حتی الامکان کم سے کم ہو۔

صریحاً تختہ کا پچلا سیر چبوترے کے قریب ترین نقطہ و پر لگنا چاہئے اور مسئلہ کا
حل اس مسئلہ پر منحصر ہو جاتا ہے کہ ایک کرہ کھینچا جائے جس کا زیر ترین نقطہ و ہو اور



وہ جہاز کے رخ کو مس کرے۔ یہ تسلیم
کر کے کہ جہاز کا رخ انتصابی ہے تختہ کے
سروں پر کرہ کے تماس افقی اور انتصابی
ہونے چاہئیں اور اس لیے تختہ کو اس طرح
رکھنا چاہئے کہ وہ سمت انتصابی کے ساتھ
۴۵° کا زاویہ بنائے۔

(۱۹۵)

شکل (۱۰۹)

مثالیں

۱۔ ایک جسم کو مائل مستوی پر جس کا زاویہ میلان ۴۵° ہے ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے
پھینکا گیا ہے۔ معلوم کرو کہ وہ مستوی کے اوپر کتنی دور جائے گا اور اوپر جانے میں
کتنا وقت لگے گا۔

۲۔ دو ذرے ایک دوسرے مائل مستوی کے دو رخوں پر جن کے میلان

۱۔ اور یہ ہیں نیچے پھسلنے ہیں مستوی کے قاعدے تک پہنچنے میں جو اوقات وہ لیتے ہیں ان کا مقابلہ کرو اور نیز انکی رفتاروں کا مقابلہ بھی کرو۔

۲۔ طول ل اور ارتفاع ف کے ایک ماٹل مستوی پر اس کی چوٹی سے ایک جسم نیچے پھینکا گیا ہے اور اسی آن ایک دوسرے ذرہ کو انتصافاً نیچے گرنیکے لیے چھوڑ دیا گیا ہے۔ اگر دونوں ذرے قاعدہ سے ایک ہی وقت ٹکرائیں تو ثابت کرو کہ پہلے ذرہ کی رفتار پھینکتے وقت

$$\frac{L - F^2}{L} \sqrt{\frac{g}{2F}}$$

ہونی چاہئے۔

۳۔ ایک ثابت نقطے سے ایک دائرہ تک جو اسی مستوی میں ہے سرچ ترین اتار کا خط معلوم کرنے کے لیے عمل دریافت کرو۔

۵۔ ذرے متعدد تاروں پر جو ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں نیچے پھسل رہے ہیں ان ذروں نے اس نقطہ سے حالت سکون سے ایک ساتھ حرکت شروع کی تھی۔ ثابت کرو کہ کسی لمحہ پر ان کی رفتاروں میں وہی نسبت ہے جو ان کے طے کردہ فاصلوں میں ہے۔

۶۔ ریل کا ایک ڈبہ ایک سطح ماٹل پر جس کا میلان ۲۵۰ میں ۱ ہے ۱۰ میل فی گھنٹہ کی ایکساں رفتار سے نیچے حرکت کرتا ہے اور سطح کے پائیں پر پہنچنے کے بعد ہموار سطح پر حرکت جاری رکھتا ہے۔ معلوم کرو کہ ساکن ہونے سے پیشتر وہ کتنی دور حرکت کر سکے گا جبکہ یہ فرض کر لیا گیا ہو کہ مزاحمت مستقل ہے اور حرکت کی ہر منزل میں وہی ہے۔

۷۔ اگر ایک موٹر گاڑی جو ۱۰۰ کیلو میٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہی ہو ۲۰ میٹر کے فاصلہ میں روکی جاسکے تو ثابت کرو کہ بریک گاڑی کو تقریباً ۵ میں ۱ میلان پر ٹھہرا سکتے ہیں۔ نیز وہ وقت معلوم کرو جس میں گاڑی کو ساکن کیا جاسکتا ہے۔

۸۔ ۱۲ ٹن وزنی ڈبہ ایک ٹرین سے جو ۲۵۰ میں ۱ میلان پر نیچے ۴۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے دوڑ رہی ہے الگ ہو جاتا ہے۔ رگڑ کی مزاحمت ۴۰ پونڈ وزن

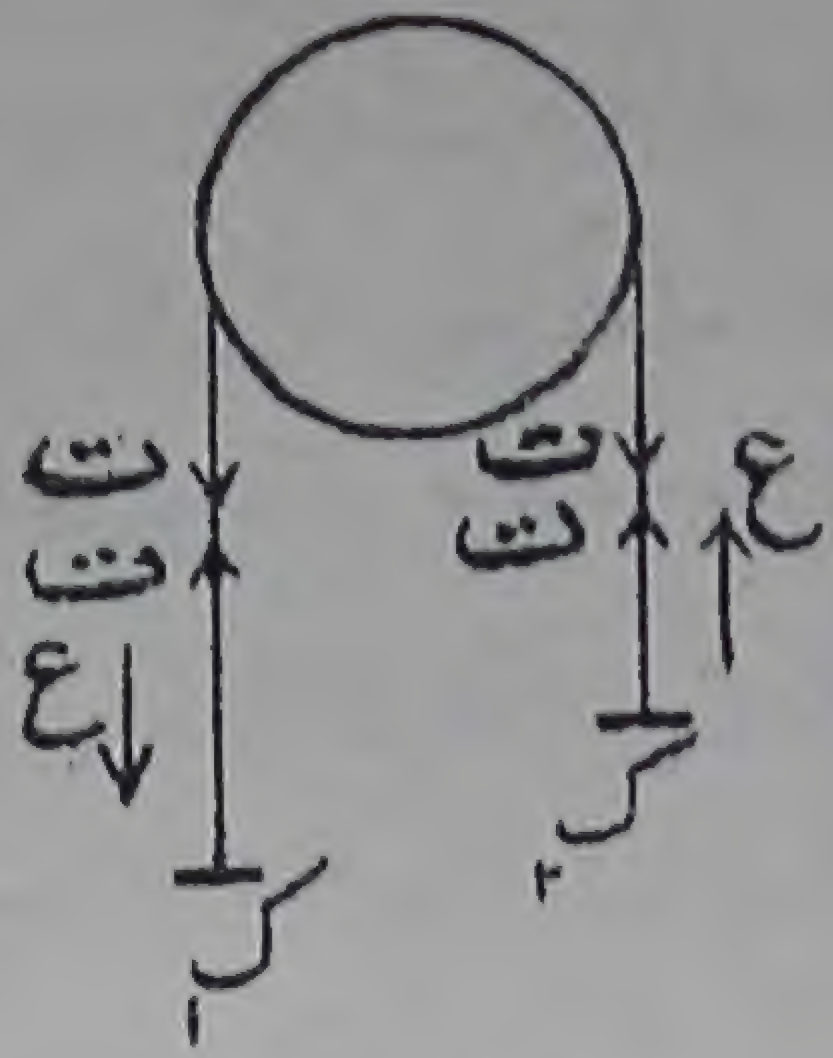
فی ٹن ہے۔ معلوم کرو کہ ڈبہ ساکن ہونے سے پیشتر کتنی دُور جائے گا۔
 ۹۔ حرّاکہ کی کھینچ ایک ٹرین کی حرکت پر معمولی مزاحمتوں کے مقابلہ میں
 اسکے کل وزن کا $\frac{1}{10}$ بڑی ہے اور جب بریک پوری طرح ڈالے جاتے ہیں تو
 کل مزاحمت اسکے وزن کا $\frac{1}{10}$ واں حصہ ہوتی ہے۔ وہ کم سے کم وقت
 معلوم کرو جس میں ٹرین ہموار سطح پر دو اسٹیشنوں کے درمیان جن کا درمیانی فاصلہ تین
 میل ہے اور جہاں گاڑی ٹہیرتی ہے سفر کر سکتی ہے۔
 ۱۰۔ مثال مابقی میں وقت معلوم کرو اگر راستہ ۱۰۰ میں امیلان پر ہو۔

ایوڈ کی مشین

۱۶۱۔ اگر کوئی جسم جاذبہ کے تحت آزادانہ گریہا ہو تو راست مشاہدات
 سے اس اسراع کو پیمائش کرنا مشکل ہوتا ہے جو جاذبہ کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے
 کیونکہ یا تو وہ فاصلہ جس میں سے جسم گرا ہے بہت بڑا ہونا چاہئے یا گرنے کا
 وقت بہت کم ہونا چاہئے۔ یہ مشکلیں کچھ حد تک اس مشین سے رفع ہوتی
 ہیں جو ایوڈ کی تجویز کردہ ہے۔

(۱۹۶) اگر ایک دُوری کو جس کے سروں سے دو مساوی اوزان بندھے ہوں
 ایک چکنی انتصابی چرخ پر اس طرح رکھا جائے کہ اوزان آزادانہ لٹکیں تو
 یہ ظاہر ہے کہ توازن ہوگا۔ اگر اوزان نامساوی ہوں تو توازن موجود نہیں
 ہو سکتا۔ ایوڈ کی مشین میں ان اوزان کے درمیان فرق کم رکھا جاتا ہے اس لئے
 حرکت سست ہوتی ہے اور اس کی پیمائش آسانی سے کی جا سکتی ہے۔
 فرض کرو کہ اوزان کی کمیتیں کم، کم ہیں جن میں سے کم بڑا ہے۔
 فرض کرو کہ جب ان اوزان کو آزاد چھوڑ دیا جاتا ہے تو کم اسراع سے
 نیچے اترتا ہے۔ دُوری کو نا امتداید پر سمجھنے سے کم کو اسراع سے
 اوپر چڑھنا چاہئے۔

فرض کرو کہ دُوری غیر وزنی ہے اور اس لیے اس کے کسی عنصر کی
 کمیت کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ پس حرکت کے دوسرے قانون سے



شکل (۱۱۰)

معلوم ہوتا ہے کہ ڈوری کے کسی خسر پر عمل کرنے والی حاصل قوت معدوم ہونی چاہئے۔ اس لیے ڈوری پر عمل کرنے والی قوتیں توازن میں ہونی چاہئیں (اگرچہ کہ ڈوری ساکن نہیں ہے) اور اس لیے حسب دفعہ (۵۴) تمام نقطوں پر تناؤ وہی ہونا چاہئے، فرض کرو کہ یہ تناؤ $ت$ ہے۔

کمیتوں $ک_۱$ ، $ک_۲$ میں سے ہر ایک پر عمل کرنے والی قوتیں اس کے وزن پر جو نیچے وار عمل کرتا ہے اور ڈوری کے تناؤ پر جو اوپر وار عمل کرتا ہے مشتمل ہیں۔ اس لیے ان دو کمیتوں پر نیچے وار حاصل قوتیں علی الترتیب $ک_۱ ج$ ۔ $ت$ اور $ک_۲ ج$ ۔ $ت$ ہیں۔ پس حرکت کی مساواتیں ہیں

$$ک_۱ ج - ت = ک_۱ ع$$

$$ک_۲ ج - ت = ک_۲ ع$$

اگر $ت$ کو ساقط کیا جائے تو

$$ع = \frac{ک_۱ - ک_۲ ج}{ک_۱ + ک_۲ ج} \quad (۴۹)$$

جس سے اسراع معلوم ہوتا ہے۔ اگر $ع$ کو ساقط کیا جائے تو $ت$ کی قیمت حاصل ہوتی ہے

$$ت = \frac{ک_۱ ک_۲ ج}{ک_۱ + ک_۲ ج} \quad (۵۰)$$

یہ ظاہر ہے کہ اگر $ک_۱$ تقریباً $ک_۲$ کے مساوی ہو تو اسراع چھوٹا ہوگا۔ مثلاً اگر اوزن ۱۰۰ اور ۱۰۱ گرام ہوں تو

$$ع = \frac{۱}{۲۰۱} ج = ۰.۰۰۵ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ$$

(۱۹۷) اتنا چھوٹا اسراع آسانی سے پیمائش کیا جاسکتا ہے کیونکہ زیادہ وزنی کمیت ۱۰ ثانیوں میں صرف ۸ فٹ نیچے اترے گی۔ مثلاً یہ دشواری پیدا ہوتی ہے کہ اگر وزنوں کے فرق کو بہت چھوٹا کر دیا جائے تو چرخ پر عمل کرنے والی قوتیں اس قدر برابر متوازن ہوتی ہیں کہ ان کا فرق سہاروں کی رگڑ وغیرہ پر غالب آنے کے لیے کافی نہیں ہوتا۔

متحرک فریم کے حوالے سے حرکت

۱۶۲۔ ہم دیکھ چکے ہیں (دفعہ ۲۵) کہ حرکت کا دوسرا قانون درست رہتا ہے جبکہ حرکت کو ایک ایسے فریم کے لحاظ سے پیمائش کیا گیا ہو جو ساکن نہیں ہے بلکہ ایکساں رفتار سے حرکت کر رہا ہے۔ اب اس قانون میں ترمیم کرنا آسان ہے جبکہ حوالے کا فریم ایک معلومہ اسراع کے ساتھ حرکت کرے۔ فرض کرو کہ حوالے کے فریم کا اسراع a ہے اور فرض کرو کہ اس اسراع a کی سمت میں ایک متحرک ذرہ کے اسراع کا جزو ترکیبی a' ہے اور فرض کرو کہ ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کا جزو ترکیبی اس سمت میں F ہے۔ حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے

(۵۱) $F = k a'$

جہاں a' وہ ترکیبی اسراع ہے جو ساکن حوالے کے فریم کے لحاظ سے ہے۔ لیکن اس اسراع a' کو دو اسراعوں کا مرکب خیال کیا جاسکتا ہے جن میں سے ایک ذرہ کا اسراع a ہے جو متحرک حوالے کے فریم کے لحاظ سے ہے اور دوسرا اس فریم کا اسراع a' ہے جو ساکن حوالے کے فریم کے لحاظ سے ہے۔ چونکہ یہ سب اسراع ایک ہی سمت میں ہیں اس لیے $a' = a + a$ اور اس لیے مساوات (۵۱) ہو جاتی ہے

$F = k(a + a)$

اس کو ہم شکل

(۵۲) $F = k a$

میں بھی لکھ سکتے ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ حرکت وہی ہے گویا کہ فریم ساکن ہے بشرطیکہ ہم خیال کریں کہ قوت F کو بقدر k ع کے گھٹا دیا گیا ہے۔

اس نتیجہ کی طبیعی توجیہ آسانی سے کی جاسکتی ہے۔ قوت F کا ایک حصہ جو k ع کے مساوی ہے ذرہ کو متحرک حوالے کے فریم کی حرکت کے ساتھ متحرک کرنے میں صرف ہوتا ہے۔ صرف باقی حصہ $F - k$ ع ہی ہے جو متحرک فریم کے لحاظ سے اسراع پیدا کرنے میں کارآمد ہے۔

۱۶۳۔ فریم جو انتصابی اسراع کے ساتھ حرکت کرے۔ (۱۹۸)

اگر حوالے کا فریم اسراع E کے ساتھ نیچے وار انتصبا با حرکت کرے تو ہم دیکھتے ہیں کہ اس فریم کے لحاظ سے اسراعوں کو پیمائش کرنے سے پیشتر کمیت k کے ہر ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کے انتصابی جزو ترکیبی کو بقدر k ع کے تخفیف شدہ سمجھنا چاہئے۔ خواہ کوئی قوتیں عمل کریں ان میں ذروں کے اوزان k ج وغیرہ ضرور ہوں گے۔ ہم یہ آسانی تخفیف k ع کو ان سے وضع کردہ فرض کر سکتے ہیں چنانچہ کسی ذرہ کے وزن کو k ج لینے کی بجائے k (ج۔ ع) لینا ہوگا۔

اس طرح حوالے کے فریم کے اسراع کی رعایت یہ فرض کر کے رکھی جاسکتی ہے کہ اسراع بوجہ جاؤ بہ k کی بجائے ج۔ ع میں تخفیف ہوا ہے۔ مثلاً اگر ایٹوم کی مشین کو آلہ بار بردار میں رکھا جائے تو اس آن جس پر آلہ کا اسراع اوپر وار ع ہو کمیتوں کا اسراع مشین کے لحاظ سے (مقابلہ کرو مساوات ۴۹ کے ساتھ)

$$E = \frac{k - k}{k + k} (ج + ع)$$

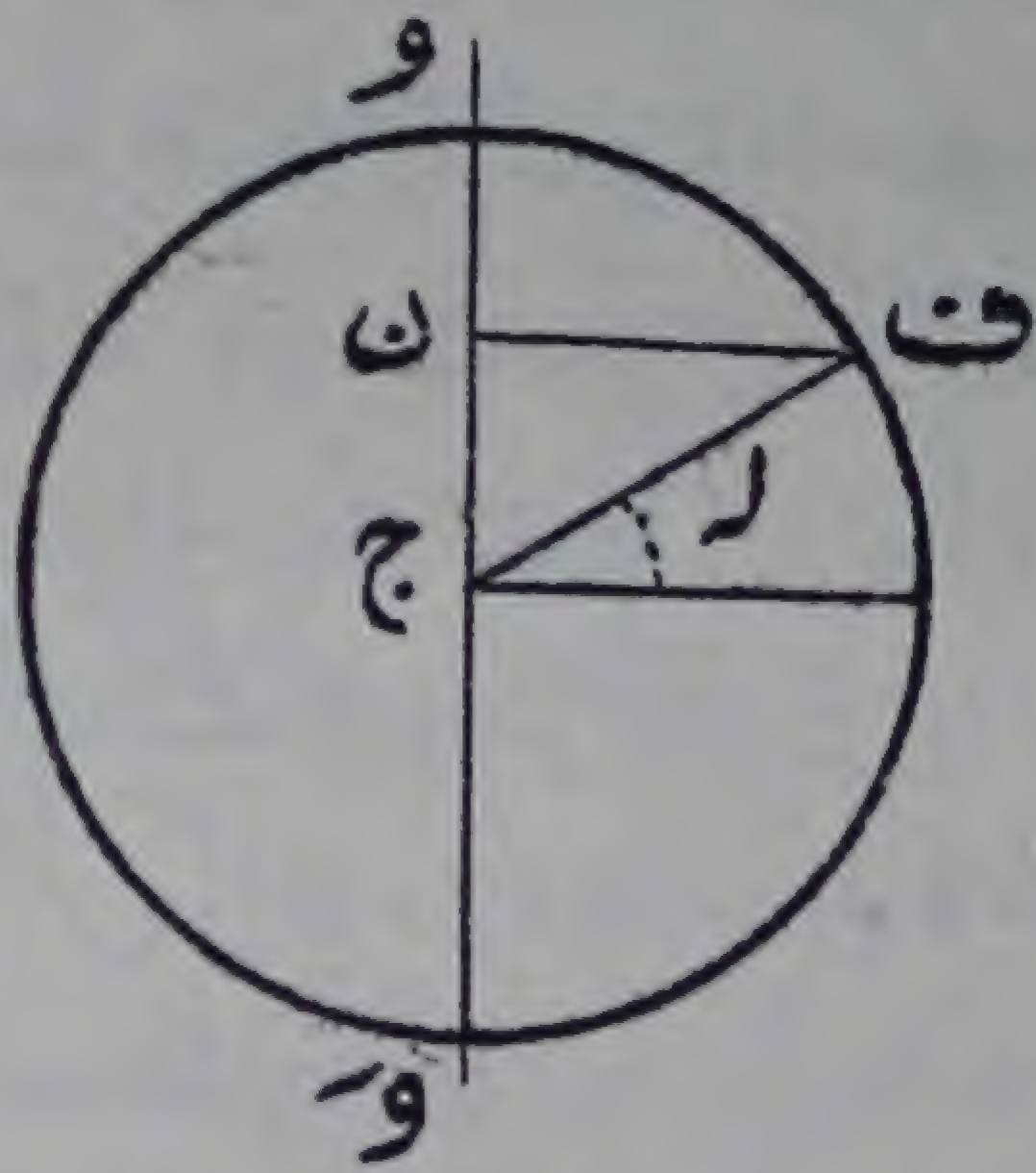
ہوگا اور ڈوری کا تناؤ (دیکھو مساوات (۵۰))

$$ت = \frac{ک_۱ ک_۲}{ک_۱ + ک_۲} (ج + ع) \quad \text{ہوگا۔}$$

۱۶۲۔ ج کی قیمت پر زمین کی گردش کا اثر۔ ہم دیکھ چکے ہیں

(دفعہ ۲۵) کہ حوالے کا فریم جو زمین کی سطح کے لحاظ سے ثابت ہو زمین کے محور کے گرد اس کی گردش کے باعث ایک

اسراع رکھتا ہے۔



شکل (۱۱۱)

فرض کرو کہ زمین کا محور و و ہے اور فرض کرو کہ زمین کی سطح پر عرض بلد لہ میں کوئی نقطہ ف ہے۔

زمین کو نصف قطر لہ کا ایک کرہ سمجھئے۔ نقطہ ف، نصف

قطر لہ کا ایک دائرہ متسم کریگا

جس کا مرکز زمین کے محور پر نقطہ ن ہوگا۔ اگر وہ رفتار ہو جس سے نقطہ

ف یہ دائرہ متسم کرتا ہے تو ف کا اسراع حسب دفعہ ۱۲، $\frac{و^۲}{لہ جم لہ}$ دائرہ کے مرکزی

جانب ہوگا یعنی ف ن کی سمت میں۔

(۱۹۹) فرض کرو کہ زمین کی زاویائی رفتار سہ ہے یعنی فرض کرو کہ وہ فی اکائی

وقت سہ نیم قطری زاویے میں سے گردش کرتی ہے۔ اب جس وقت میں ف ایک مکمل دائرہ متسم کرتا ہے اسی وقت میں زمین ایک مکمل گردش کرتی

ہے یعنی $\frac{\pi^۲}{سہ}$ ، یہ وقت $\frac{\pi^۲ لہ جم لہ}{و}$ کے بھی مساوی ہے۔ اس لیے

$$و = لہ سہ جم لہ$$

اب حوالے کے فریم کا اسراع سمت ف ن میں

$$\frac{و^۲}{لہ جم لہ} = سہ لہ جم لہ$$

مربع لینے اور جمع کرنے اور ظاہری وزن کو حسب معمول ک ج سے تعبیر (۲۰۰)

کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ک^۲ ج^۲ = لا^۲ + ما^۲ = ک^۲ (ج^۲ - ۲ سہ^۲ ج + جم^۲ لہ + سہ^۲ لہ جم^۲ لہ)$$
(۵۵)

زمین کے قطر کو ۷۹۲۷ میل اور ج کی قیمت کو (جو قطب شمالی پر اسراع
 بوجہ جاذبہ عرض ہے) ۳۲۶۲۵ لیتے سے آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{سہ^۲ لہ}{ج} = \frac{۱}{۲۹۰} ، تقریباً$$

اس کا مربع اس قدر چھوٹا ہے کہ اس کو پہلے تقرب کی حد تک نظر انداز
 کیا جاسکتا ہے اور مساوات (۵۵) کو شکل

$$ج = ج - سہ^۲ لہ جم^۲ لہ$$
 میں لکھا جاسکتا ہے۔

اس طرح عرض بلد لہ میں ظاہری وزن اصلی وزن سے بقدر
 ک سہ^۲ لہ جم^۲ لہ کے کم ہوتا ہے یا تقریباً کل وزن کا $\frac{۱}{۲۹۰}$ جم^۲ لہ کے کم
 ہوتا ہے۔

ظاہری وزن نصف قطر ج ف پر عمل نہیں کرتا۔ اگر ہم اس کو
 نصف قطر کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہوئی سمت میں عمل کرتا ہوا فرض کریں
 مساواتوں (۵۳) اور (۵۴) سے حاصل ہوگا

$$مس طہ = \frac{ما}{لا} = \frac{سہ^۲ لہ جم^۲ لہ جب لہ}{ج - سہ^۲ لہ جم^۲ لہ}$$

$$= \frac{۱}{۲۹۰} جم^۲ لہ جب لہ ، تقریباً$$

اس سے کسی نقطہ پر زمین کے نصف قطر سے خط شاقول کا
 انحراف حاصل ہوگا۔

متحرک اجسام کے درمیان رگڑ کے تعاملات

۱۶۵۔ تجربہ سے یہ معلوم ہوا ہے کہ ربط

ف = مہ = مہ

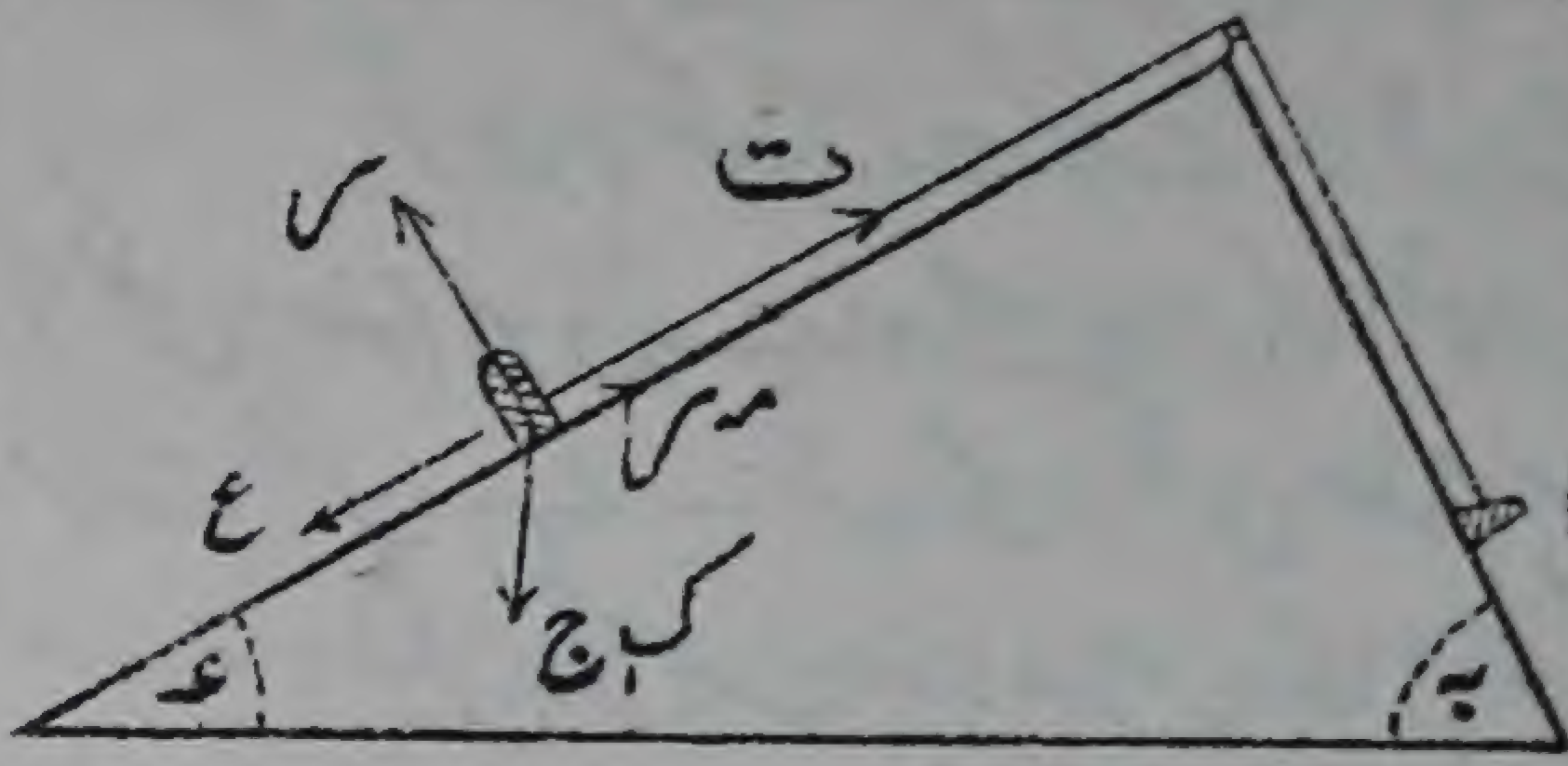
(جس میں ف اور مہ دو اجسام کے درمیان تعامل کے ماسی اور عمادی اجزاء کے ترکیبی ہیں) بڑی حد تک درست رہتا ہے جبکہ اجسام ایک دوسرے پر سے پھسل رہے ہوں۔ رگڑ کی قدر مہ کی قیمت بالکل وہی نہیں ہوتی ہے جو اجسام کے ساکن ہونے کی صورت میں ہوا کرتی ہے بلکہ حرکت کی صورت میں مہ کی قیمت ہمیشہ قدرے بڑی ہوتی ہے۔

دو جسموں کے درمیان رگڑ جبکہ اجسام ایک دوسرے پر پھسل رہے ہوں حرکی رگڑ کہلاتی ہے، لیکن اگر اجسام ساکن ہوں تو اس کو سکونی رگڑ کہتے ہیں۔

توضیحی مثالیں

۱۔ کمیتوں ک اور ک کے دو ذرے، زاویوں عہ اور یہ کے دو ماٹل مستویوں پر جو ایک دوسرے سے جڑے ہوئے ہیں رکھے ہیں اور وہ ایک دوری کے ذریعہ مربوط ہیں جو مستویوں کے سرے پر کی ایک چکنی چرخہ پر سے گزرتی ہے۔ اگر ذروں اور مستویوں کے درمیان رگڑ کی قدریں مہ، مہ ہوں تو حاصل حرکت معلوم کرو۔

اگر حرکت فی الواقع وقوع پذیر ہوتی ہے تو ایک ذرہ ک (فرض کرو) کو اپنے مستوی پر نیچے وار حرکت کرنی چاہئے اور دوسرے ک کو اوپر وار۔ چونکہ دوری نا امتداد پذیر ہے اس لیے ہر ایک ذرہ کا اسراع وہی ہوگا، فرض کرو کہ یہ اسراع سمت حرکت میں ع ہے۔



پہلے ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں

حسب ذیل ہیں:

(۱) اس کا وزن کم ج

انتخاباً نیچے وار

(ب) دوری کا تناو ت

مستوی کے اوپر وار

شکل (۱۱۳)

(ج) مستوی کا تعامل - فرض

کرو کہ اس کو مستوی کے عمود وار اور مستوی کے اوپر وار سمت میں اجزاء $س$ اور $م$ میں تحلیل کیا گیا ہے۔

چونکہ مستوی کے عماد کی سمت میں ذرہ کم کا کوئی اسراع نہیں ہے اس لئے حاصل قوت کا جزو ترکیبی اس سمت میں صفر ہونا چاہئے۔ پس اس سمت میں تحلیل کرنے سے

$$س - ک ج جم ع = ۰$$

مستوی کے نیچے وار تحلیل کرنے سے

$$ک ج جب ع - م س - ت = ک ع$$

اور اگر ہم نامعلوم تعامل $س$ کو سا قہ کریں تو

$$ک ج (جب ع - م جم ع) - ت = ک ع \quad (۱)$$

اسی طرح کی مساوات دوسرے ذرہ کی حرکت کے لیے حاصل کی جاسکتی

ہے۔ یعنی

$$ک ج (جب ب + م جم ب) - ت = ک ع \quad (ب)$$

ع کے لیے ان مساواتوں (۱) اور (ب) کو حاصل کرنے سے اسراع حاصل

ہوتا ہے

$$ع = \frac{ک (جب ع - م جم ع) - ک (جب ب + م جم ب) - ت}{ک + ک} \quad (ج)$$

اگر $ع$ کی قیمت منفی نکلے تو ہم دیکھتے ہیں کہ اسراع اس سمت میں نہیں ہو سکتا

جس میں حرکت کا واقع ہونا ہم نے فرض کیا ہے۔

اگر نظام سکون سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے تو مفروضہ سمت میں حرکت ناممکن معلوم ہوتی ہے اور ہمیں اس کا امتحان کرنا چاہئے کہ آیا مخالف سمت میں حرکت ممکن ہے۔ اگر یہ بھی ناممکن معلوم ہو جائے تو نظام ساکن رہے گا۔

(۲۰۲)

لیکن اگر سمت مفروضہ میں نظام متحرک ہوا ہے تو مساوات (ج) سے حاصل شدہ اسراع عمل میں آجائے گا اور وہ مثبت ہوگا تو رفتار میں اضافہ ہوگا اور منفی ہوگا تو رفتار گھٹیلگی۔ اس آخری صورت میں نظام کسی وقت ساکن ہو جائے گا اور پھر ہمیں امتحان کرنا چاہئے کہ آیا وہ سمت مخالف میں حرکت کرنا شروع کرے گا یا نہیں۔

۲۔ ایٹوڈ کی مشین کی ڈوری کے ایک سرے سے کمیت

ک کا ایک وزن بندھا ہے۔ دوسرے سرے پر کمیت ک کی

ایک چرخ لگی ہوئی ہے جس پر سے ایک ڈوری گذرتی ہے جس کے

سروں سے کمیتیں ک، ک، ک لٹک رہی ہیں۔ حرکت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ کمیت ک کا اسراع ع ہے جس کو نیچے واریمائنٹس کیا گیا ہے۔

تب ک کا اسراع اوپر وار ع ہونا چاہئے۔

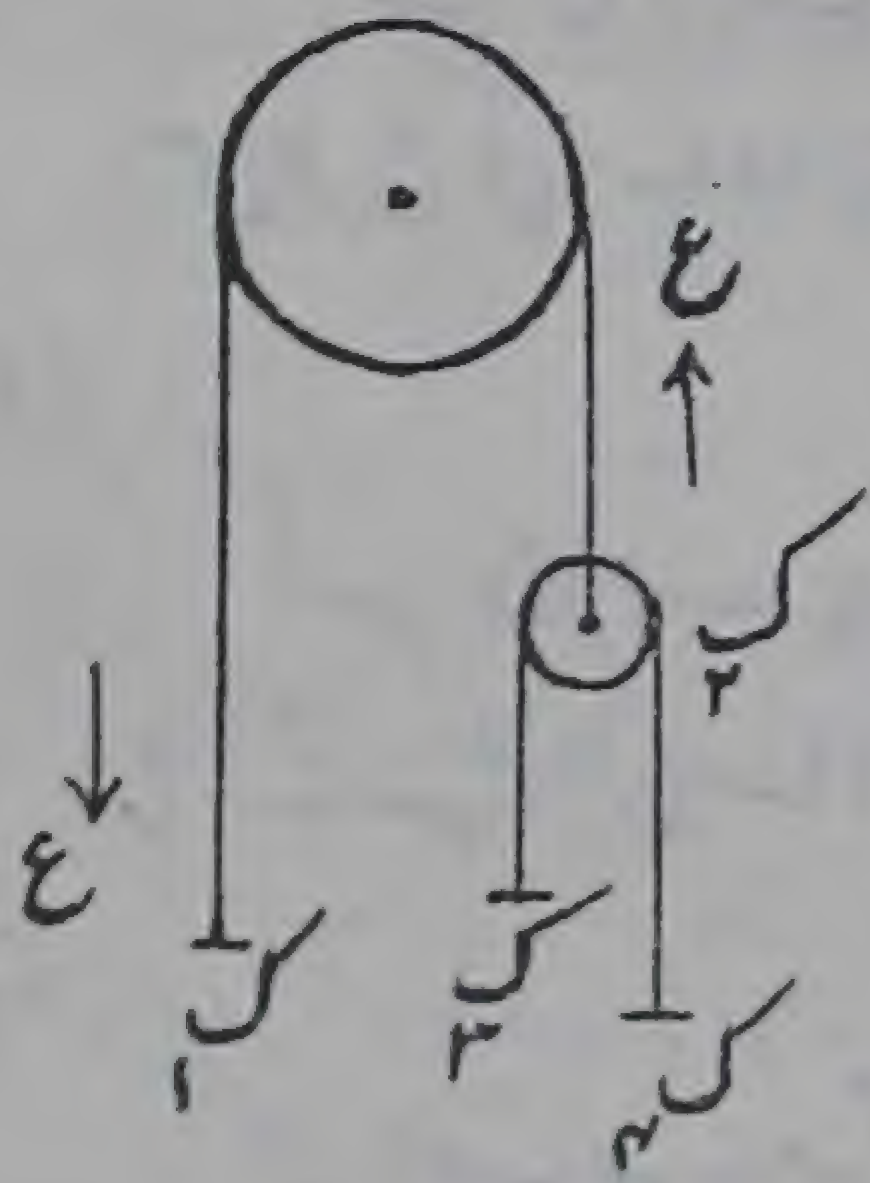
کمیتیں ک، ک، ک سے خود ایک ایٹوڈ کی

مشین کا نظام حاصل ہوگا جو کل کا کل اسراع

ع سے اوپر وار حرکت کرے گا۔ پس

اس مشین کی ڈوری کا تناؤ دت (فرض کرو)

حسب ذیل ہے (دیکھو دفعہ ۱۶۳):



شکل (۱۱۴)

$$د = \frac{ک + ک + ک}{ک + ک + ک} (ع + ع) (۱)$$

اگر اس ڈوری کے تناؤ کو جو ک اور ک کو ملاتی ہے د سے تعبیر کریں تو

ک کے لئے حرکت کی حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے:

(ب)

$$ت_۱ - ک_۱ ج - ۲ ت_۱ = ک_۱ ع$$

اور ک کے لئے حرکت کی مساوات ہے

(ج)

$$ک_۱ ج - ت_۱ = ک_۱ ع$$

مساواتوں (ا)، (ب)، (ج) سے ت_۱ اور ت_۲ کو سا قوا کرنے سے

اسراع ع کی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے

$$ع = \frac{ک_۱ - ک_۲ - \frac{ک_۱ ک_۲}{ک_۱ + ک_۲}}{ج}$$

کمیتوں ک_۱، ک_۲ کے اسراع بلحاظ ک_۱ کے دفعہ ۱۶۳ کی رو سے
حسب ذیل معلوم ہوتے ہیں :-

$$\pm \frac{ک_۱ - ک_۲}{ک_۱ + ک_۲} (ع + ج)$$

۳۔ ایک افقی دائرہ پر مساوی فاصلوں سے ن چھوٹے چکنے چھلے

ثبت کر دئے گئے ہیں اور ان حلقوں میں سے ایک بے سراتا کا بالترتیب

گذرتا ہے۔ اگر چھلوں کے ہر متصلہ زوج کے درمیانی حصہ کے تاگے

سے علی الترتیب کمیتوں ف، ق، س، ... کی ن چرخیاں بہاری گئی ہوں

اور ڈوری کے وہ حصے جو چرخوں کو مس نہیں کرتے انتصابی ہوں تو ثابت

کرو کہ چرخ ف، اسراع

$$\frac{۱}{ف} + \frac{۱}{ق} + \frac{۱}{س} + \dots = \frac{۱}{ف} + \frac{۱}{ق} + \frac{۱}{س} + \dots$$

اور مساوات (۱) میں ۲ ت کی بجائے یہ قیمت درج کرنے پر غف کی مطلوبہ قیمت حاصل ہوتی ہے۔

مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ ایٹوڈ کی مشین میں ڈوری کا تناؤ اس سے لٹکی ہوئی دو کمیتوں کے اوزان کے درمیان ہوتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ یہ تناؤ ان وزنوں میں سے بڑے کی بہ نسبت چھوٹے سے قریب تر ہوتا ہے۔

۲۔ ۱۶ اور ۱۴ اونس کے دو وزن ایک نامتراد پذیر ڈوری کے ذریعہ طے ہیں جو ایک چکنی چرخ پر سے گزرتی ہے۔ اوزان ڈوری سے انقباضاً لٹکتے ہیں اور اور ڈوری کو ایک نقطہ پر ثابت کر دیا گیا ہے تاکہ کوئی حرکت وقوع پذیر نہ ہو سکے۔ اگر اچانک ڈوری کو چھوڑ دیا جائے تو چرخ پر سے گزرنے کے دباؤ میں جو تبدیلی ہوگی اس کو معلوم کرو۔

۳۔ ایک ڈوری ایک چکنے مینر پر سے اس کے مقابل کے کناروں کے علی القوام گزرتی ہے اور اس کے سروں سے دو کمیتیں H اور Q انقباضاً لٹکتی ہیں۔ اگر ڈوری کے اس حصہ پر جو مینر پر ہے ایک کمیت K لگا دی جائے تو ثابت کرو کہ نظام کا اسراع حسب ذیل ہوگا:

ف - ق

ج

ف + ق + ک

۴۔ ایک ڈوری کے دو سروں سے دو کمیتیں کم، کم باندھی گئی ہیں (۲۰۴) اور ڈوری کو ایک کھونٹی پر سے گزارا گیا ہے جیسا کہ ایٹوڈ کی مشین میں کیا جاتا ہے۔ کھونٹی چکنی نہیں ہے اور اس میں اور ڈوری کے درمیان رگڑ کا تاویہ نہ ہے۔ حرکت معلوم کرو۔

۵۔ مثال ۳ میں فرض کرو کہ مینر اور وزن K کے درمیان رگڑ کی قدر m ہے اور مینر اور ڈوری کے درمیان m ہے۔ حرکت معلوم کرو۔

۶۔ ایک رسی ایک چکنی چرخ پر سے لٹک رہی ہے۔ وہ ایکساں اسراع معلوم کرو جس کے ساتھ ایک شخص کو جس کا وزن ۱۰ اسٹون ہے رسی کے ایک سرو پر

چڑھنا پڑے گا تاکہ رسی جس کے دوسرے سرے سے ۱۲ اسٹون کا وزن بندھا ہے ساکن رہے۔

۷۔ ایٹوڈ کی مشین کی ڈوری کے ایک سرے سے ایک بندر بندھا ہوا ہے اور دوسرے سرے پر اتنا وزن بندھا ہوا ہے جو ٹھیک بندر کے وزن کے مساوی ہے اور چرخہ سے ٹھیک اتنے ہی نیچے ہے۔ بندر دفعتاً اوپر چڑھنا شروع کرتا ہے۔ کون تیز تر چڑھے گا بندر یا وزن۔

۸۔ ۱۰ پونڈ اور ۲ پونڈ کے وزن جو انتصابی ڈوریوں سے لٹک رہے ہیں پھینکے اور محور پر متوازن ہیں۔ اگر ایک پونڈ کی کمیت کا اضافہ چھوٹے وزن میں کر دیا جائے تو وہ اسراع معلوم کرو جس سے وہ نیچے اترنے لگیگا، نیز ہر ڈوری کا تناؤ دریافت کرو۔ (پھیٹے اور محور کا جمود نظر انداز کر دیا جائے)۔

۹۔ ۵ پونڈ کی ایک کمیت ایک چکنے مستوی پر جس کا میلان افق کے ساتھ ۳۰° ہے لٹکی ہوئی ہے اور اس سے ایک نہیں تاگا بندھا ہے جو مستوی کی چوٹی پر کی ایک چرخہ پر سے گزرتا ہے جس کے دوسرے سرے سے ۳ پونڈ کی کمیت انتصاباً لٹک رہی ہے۔ تاگے کی کھینچ کا مقابلہ کرو جبکہ مستوی پر کی کمیت کو ثابت رکھا جائے اور جبکہ اسے آزاد چھوڑ دیا جائے۔ اگر کمیت کو آزاد چھوڑنے کے ۸ ثانیے بعد تاگے کو دفعتاً جدا کر لیا جائے یا جلا دیا جائے تو معلوم کرو کہ کمیت مستوی کے اوپر پیچھے پلٹنے سے پیشتر کتنی دور تک اوپر چڑھے گی۔

۱۰۔ ایک ہلکا تاگا دو ثابت چرخوں (اور جب پر سے گزرتا ہے اور ان کے درمیان اس پر ایک تیسری چرخہ ج کا قالب ہے جس کے نیچے سے وہ گزرتا ہے۔ کمیت ک کے تاگے کے ہر ایک سرے سے باندھی گئی ہے اور کمیت ک، حرکت پذیر قالب سے بندھی ہے۔ چرخوں کی کمیتیں قابل نظر انداز ہیں اور چرخوں کو اس طرح ترتیب دیا گیا ہے کہ تاگے کے تمام حصے انتصابی ہیں۔ ثابت کرو کہ جب نظام کو چھوڑ دیا جائے تو تاگے کا تناؤ ک (ک + پ) پونڈ ہے۔ نیز وہ اسراع معلوم کرو جس کے ساتھ کمیت ک گرتی ہے۔

۱۱۔ کمیت ک کا ایک پلکار پیٹہ جس کا طبعی طول ۱ اور مقیاس لہ ہے

محیط ب (۱۷) کے ایک کھردرے افقی پھیٹے کے گرد لپٹا گیا ہے۔ کتنی تیزی سے پھیپہ کو گھمانا چاہئے کہ پٹہ پھیپہ سے نکل جائے۔

۱۲۔ مثال ۱۱ کا لچکدار پٹہ محیط ب کے ایک چکنے کرور پر جو زاویہ رفتار سے کے ساتھ گھوم رہا ہے رکھا گیا ہے۔ سکون کا محل معلوم کرو۔

۱۳۔ اگر زمین تیز سے تیز تر اور اس سے تیز تر گھومنے لگے حتیٰ کہ بالآخر اجسام اس کے خط استواء سے اڑنے لگیں تو ثابت کرو کہ اس منزل کے پہنچنے تک کسی نقطہ پر خط شاقول زمین کے محور کے متوازی ہو جائے گا۔

۱۴۔ ایک جسم کو ایک بیچدار ترازو پر رکھا گیا ہے اور ترازو ایک جہاز میں ہے جو خط استواء پر رفتار و سے حرکت کر رہا ہے۔ ترازو صحیح طور پر وزن دکھلاتا ہے جبکہ جہاز ساکن ہو۔ ثابت کرو کہ جب جہاز حرکت میں ہوتا ہے تو ترازو کی قوت سے جسم کے وزن کا $\frac{1}{2}$ سے گنا خطا (تقریباً) ظاہر ہوتی ہے جہاں سے زمین کی زاویہ رفتار ہے۔

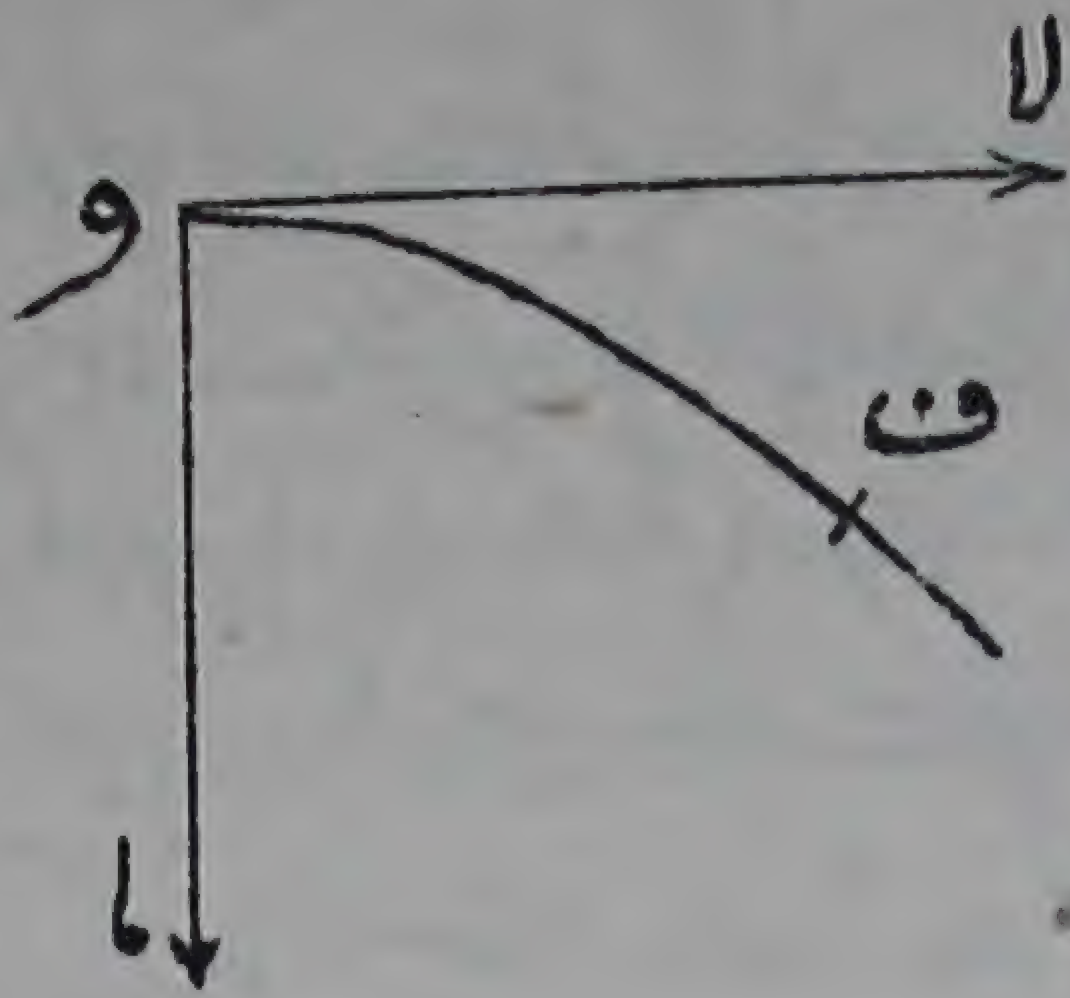
مرمیوں کی پرواز

(۲۰۵)

۱۶۶۔ مری سے یہاں مراد وہ جسم ہے جو اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کو ایک ذرہ تصور کیا جاسکے اور جو اس طریقہ سے پھینکا گیا ہو کہ وہ جاذبہ کے اثر کے تحت راستہ طے کرے۔

کوئی مری جاذبہ کے ساتھ ساتھ ہوا کی فراحت سے بھی بالعموم متاثر ہوگا لیکن ہم فرض کریں گے کہ ہوا کی فراحت ناقابل قدر ہے اور اس لیے جاذبہ ہی صرف وہ قوت ہے جس کا لحاظ رکھنے کی ضرورت ہے۔

فرض کرو کہ ہم اول سادہ ترین صورت لیتے ہیں چنانچہ خیال کرو کہ مری کو نقطہ ۵ (شکل ۱۱۶) سے رفتار و کے ساتھ افقاً پھینکا گیا ہے۔ عمل کرنے والی قوت صرف جاذبہ ہے جس کا افقی جزو ترکیبی کوئی نہیں ہے اور اس لیے افقی رفتار و پوری حرکت کی اثناء میں علیٰ حالہ رہتی ہے۔ ابتدائی رفتار کا



شکل (۱۱۶)

انتصابی جزو ترکیبی صفر ہے لیکن نیچے وار اسراع بوجہ جاذبہ ج ہے۔ اس لیے وقت ت کے بعد افقی فاصلہ طے شدہ ع ت ہے اور وہ انتصابی فاصلہ جس میں سے جسم گر چکا ہے $\frac{1}{2} ج ت^2$ ہے۔ افقی فاصلہ طے شدہ کو لا سے اور انتصابی فاصلہ کو ما سے تعبیر کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$لا = ع ت، ما = \frac{1}{2} ج ت^2$$

راستہ طے شدہ کی مساوات، ان مساواتوں سے ت کو سا قط کرنے سے حاصل ہوگی چنانچہ ایسا کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ما = \frac{ج}{2ع} لا^2$$

یہ مساوات ایک قطع مکانی کی ہے جس کا وتر خاص $\frac{2ع}{ج}$ ہے۔

صریحاً اس منحنی کو متعین کرنے کا مسئلہ فی نفسہ وہی ہے جو دفعہ ۱۵۶ میں

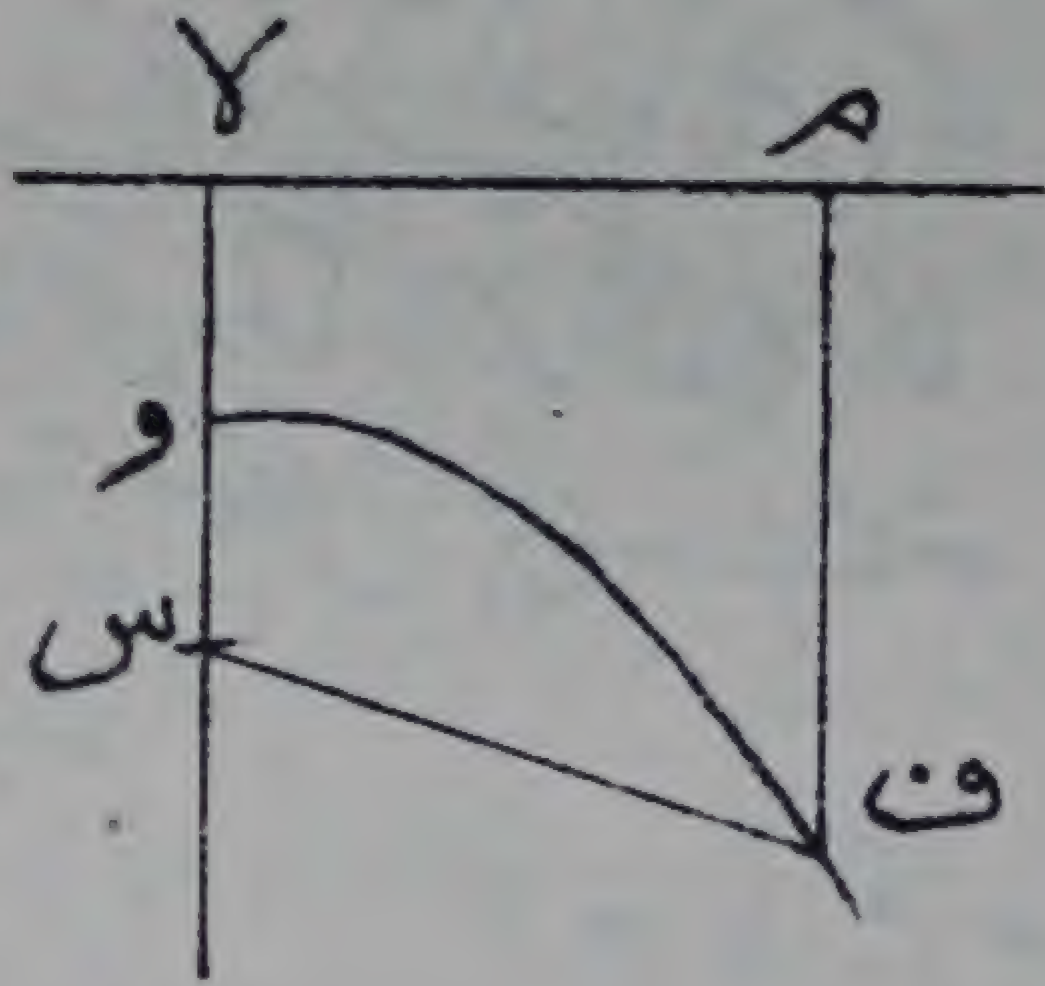
زیر بحث آچکا ہے۔ وہاں ایک جسم آزادانہ گر رہا تھا اور اپنا راستہ ایک کاغذ پر جو ایکساں افقی رفتار کے ساتھ اس سے گذر رہا تھا مرسم کرتا تھا۔ یہاں بھی ایک جسم آزادانہ گر رہا ہے اور ہم تصور کر سکتے ہیں کہ وہ اپنا راستہ ایک کاغذ پر مرسم کرتا ہے جس سے وہ ایک ایکساں افقی رفتار سے گذرنا جاتا ہے۔ ان دو صورتوں میں اضافی حرکت وہی ہے اور اس لیے منحنی ضرور وہی ہونے چاہئیں۔

۱۶۷۔ (۲۰۶) — پر رفتار ع ہے اور یہ رفتار وہی ہے جو اس صورت میں ہوتی

اگر جسم و کے انتصاباً اوپر ارتفاع $\frac{ع}{ج}$ سے نیچے و تک گرتا۔ یہ ارتفاع

وتر خاص کا ایک چوتھائی ہے اور اس لیے مرتب لامر کے نیچے مکانی کے
راس و کی گہرائی کے مساوی ہے۔ اس لیے و پر مری کی کل توانائی اس
کل توانائی کے مساوی ہے جو سکون کی حالت میں لا پر اس کی ہوتی یا مرتب کے
کسی اور نقطہ پر ہوتی کیونکہ مرتب

افقی ہے۔ اب چونکہ کل توانائی مستقل



رہتی ہے ہم دیکھتے ہیں کہ جب ذرہ
اپنے راستہ کے کسی نقطہ ف پر ہوتا
ہے تو اس کی توانائی بالحرکت وہ ہوتی
ہے جو فاصلہ ف م میں سے گرنے کی
وجہ سے اس کو حاصل ہوتی ہے یعنی
اس فاصلہ میں سے جو مرتب سے

شکل (۱۱ء)

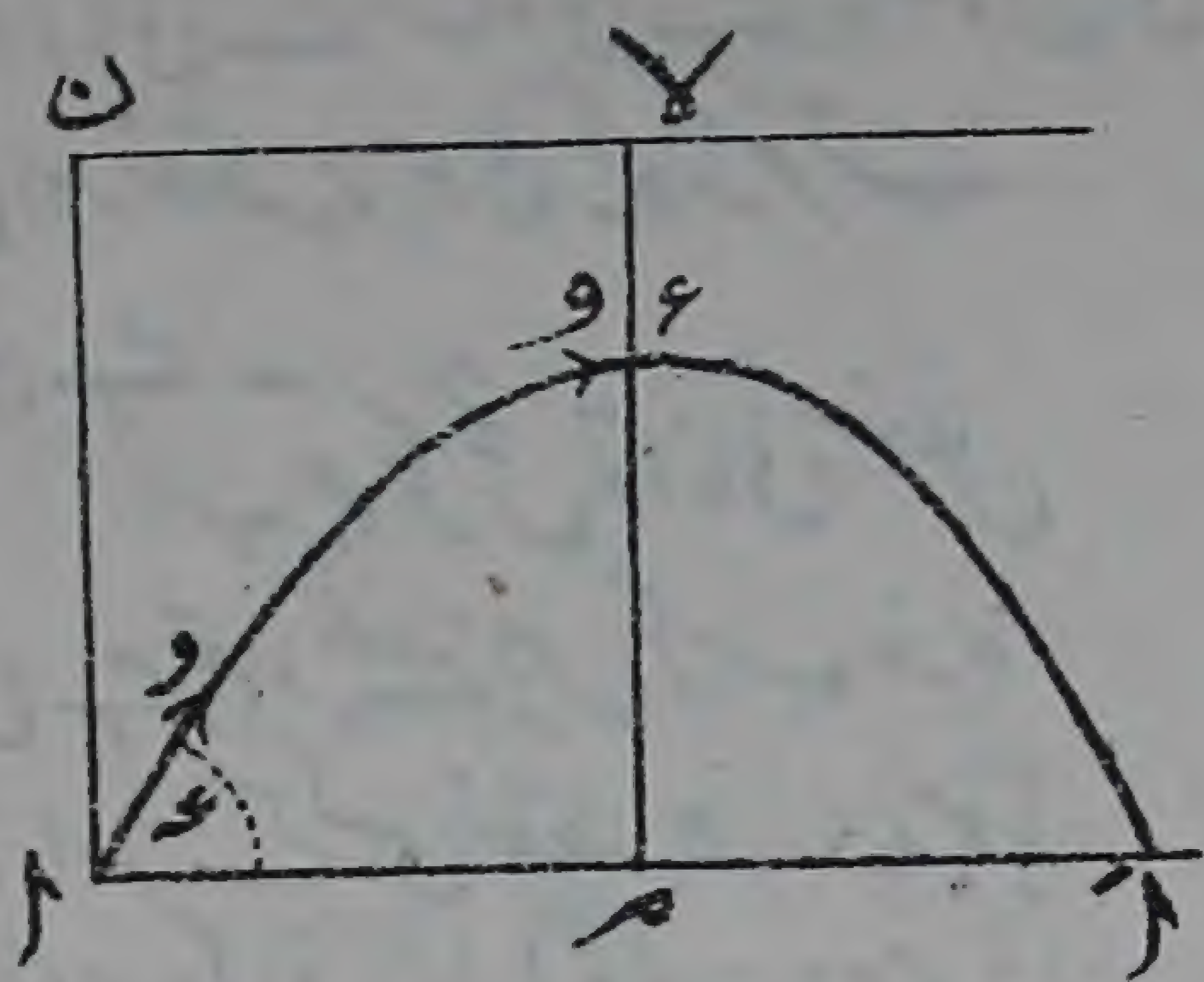
نقطہ ف تک ہے۔ اس کو حسب ذیل طریقہ پر بیان کیا جاسکتا ہے:

کسی نقطہ پر مری کی رفتار وہ ہوتی ہے جو مرتب سے اس نقطہ

تک گرنے کی وجہ سے پیدا ہو سکتی ہے۔

۱۶۸۔ یہ فرض کرنے کی بجائے کہ ذرہ کو مکانی کے راس و سے اتفاقاً پھینکا
گیا ہے ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ وہ و پر ہوا میں سے پرواز کرتے ہوئے پہنچا ہے
اور اس سے پیشتر اس کو کسی نقطہ ا سے پھینکا گیا تھا۔ اسی استدلال
سے جس سے یہ معلوم ہوا تھا کہ و سے گزرنے کے بعد ذرہ کے راستہ کا
حصہ مکانی ہے یہ معلوم ہو گا کہ و پر پہنچنے سے پیشتر بھی اس کا راستہ
مکانی ہے۔ اس لیے کسی ذرہ کا راستہ جو کسی طریقہ سے پھینکا گیا ہو مکانی
ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک ذرہ کو نقطہ ا سے ایک ایسی سمت میں رفتار و
سے پھینکا گیا ہے جو افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے۔ فرض کرو کہ اسکے



راستہ کار اس و ہے اور فرض
کرو کہ جب مرئی نقطہ و میں سے
گذرتا ہے تو اس کی رفتار ۶ ہے
یہ رفتار بے شبہ افقی ہے —
(۲۰۴)
ذرہ پر عمل کرنے والی کوئی
افقی قوت نہیں ہے اور اس لیے
اس کی افقی رفتار اس کی پوری
پرواز میں مستقل رہتی ہے۔
اس لیے

شکل (۱۱۸)

$$۶ = وجمع$$

اس لیے مکانی کا وقت خاص

$$\frac{۲۶}{ج} = \frac{۲۰}{جمع}$$

رفتار و وہ ہے جو مرتب سے ایک گزرنے کی وجہ سے پیدا
ہوتی ہے اس لیے اگر ن لا مرتب ہو تو

$$ن = \frac{و}{ج}$$

ا سے و تک پرواز کا وقت وہ وقت ہے جو جاذبہ انتصابی وقت

و جب ۶ کو معدوم کرنے میں لیتی ہے اس لیے وہ $\frac{و}{ج}$ جب ۶ ہے۔ اس وقت

میں افقی فاصلہ ا م یکساں رفتار ۶ سے طے ہوا ہے، اس لیے

$$ام = \frac{و}{ج} = ۶ = \frac{و}{ج} جب ۶$$

طے شدہ انتصابی فاصلہ و م بموجب مساوات (۴۴) نصف وقت مضروب
ابتدائی انتصابی رفتار کے مساوی ہے، اس لیے

$$و = \frac{1}{2} \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ ج}$$

افقی مستوی پر پورا ٹپہ 'ا' کا دگنا ہے اور اس لیے

$$ا = 2 \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ ج} = \frac{1}{2} \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ ج}$$

۱۶۹۔ اگر و کی قیمت مستقل ہو (مثلاً اگر ہم گولی کو بارود کی ایک مقررہ

بھرن سے فائر کرتے رہیں) اور زاویہ ع متغیر ہو تو ٹپہ 'ا' 'ج' سے

تجاوز نہیں کر سکتا کیونکہ جزو ضربی جب ۲ ع کی قیمت اکائی سے زیادہ

نہیں ہو سکتی۔ اس لیے اگر پھینکنے کی رفتار و معلوم ہو تو بڑے سے

بڑا ٹپہ جو افقی مستوی پر حاصل ہو سکتا ہے 'ج' ہے اور اس ٹپہ کو حاصل

کرنے کے لیے جب ۲ ع = ۱ ہونا چاہئے یعنی ع = ۲۵۔ پس کسی

مرمی کو افقی مستوی پر حتی الامکان دور پھینکنے کے لیے اس کو زاویہ ۲۵ پر

پھینکنا چاہئے۔

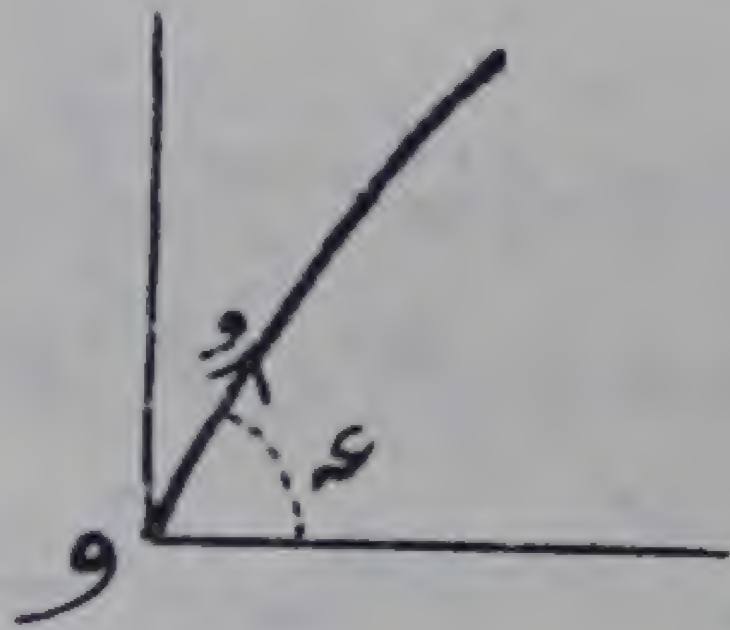
۱۷۰۔ ان نتائج کو تجلیلی طور پر بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم

نقطہ رسیدگی کو مبدا لیتے ہیں اور اس مستوی کو جس میں پرواز واقع ہوتی ہے

مستوی لا ما فرض کرتے ہیں جہاں

محاور لا اور ما علی الترتیب افقی

اور انتصابی ہیں۔



اس نقطہ کا لا محدود جس پر

ذرہ وقت ت کے بعد پہنچتا ہے

اس افقی فاصلے کے مساوی ہے

جو وقت ت میں یکساں رفتار و جم ع سے طے ہوتا ہے۔ اس لیے

$$لا = و \text{ جم } ع \times ت \dots \dots \dots (۵۶)$$

اسی طرح اس نقطہ کا لا محدود وہ فاصلہ ہے جو وقت ت میں ابتدائی

رفتار و جب ع اور ابلا ج کے ساتھ طے ہوا ہے۔ اس لیے یہ فاصلہ

ما = واجب عہ x ت - $\frac{1}{2}$ ج ت^۲ (۵۷)
 ہے۔ اگر ہم مساواتوں (۵۶) اور (۵۷) سے ت کو سا قط کریں تو راستہ
 کی مساوات حاصل ہوگی چنانچہ

$$\text{ما} = \text{لاس عہ} - \frac{\text{ج لا}^2}{2 \text{ و } 2 \text{ جم}^2 \text{ عہ}} \dots (58)$$

اس کو شکل

ما - $\frac{1}{2}$ واجب عہ = $\frac{\text{ج}}{2 \text{ و } 2 \text{ جم}^2 \text{ عہ}} (\text{لا} - \frac{\text{واجب عہ جم عہ}}{\text{ج}})$
 میں رکھا جاسکتا ہے جو صریحاً ایک قطع مکانی کی مساوات ہے جس کا
 راس نقطہ

$$\text{لا} = \frac{\text{واجب عہ جم عہ}}{\text{ج}} \text{ ما} = \frac{1}{2} \frac{\text{واجب عہ}}{\text{ج}} \dots (59)$$

پر ہے اور جس کے وتر خاص کا طول

$$\frac{2 \text{ و } 2 \text{ جم}^2 \text{ عہ}}{\text{ج}}$$

ہے۔

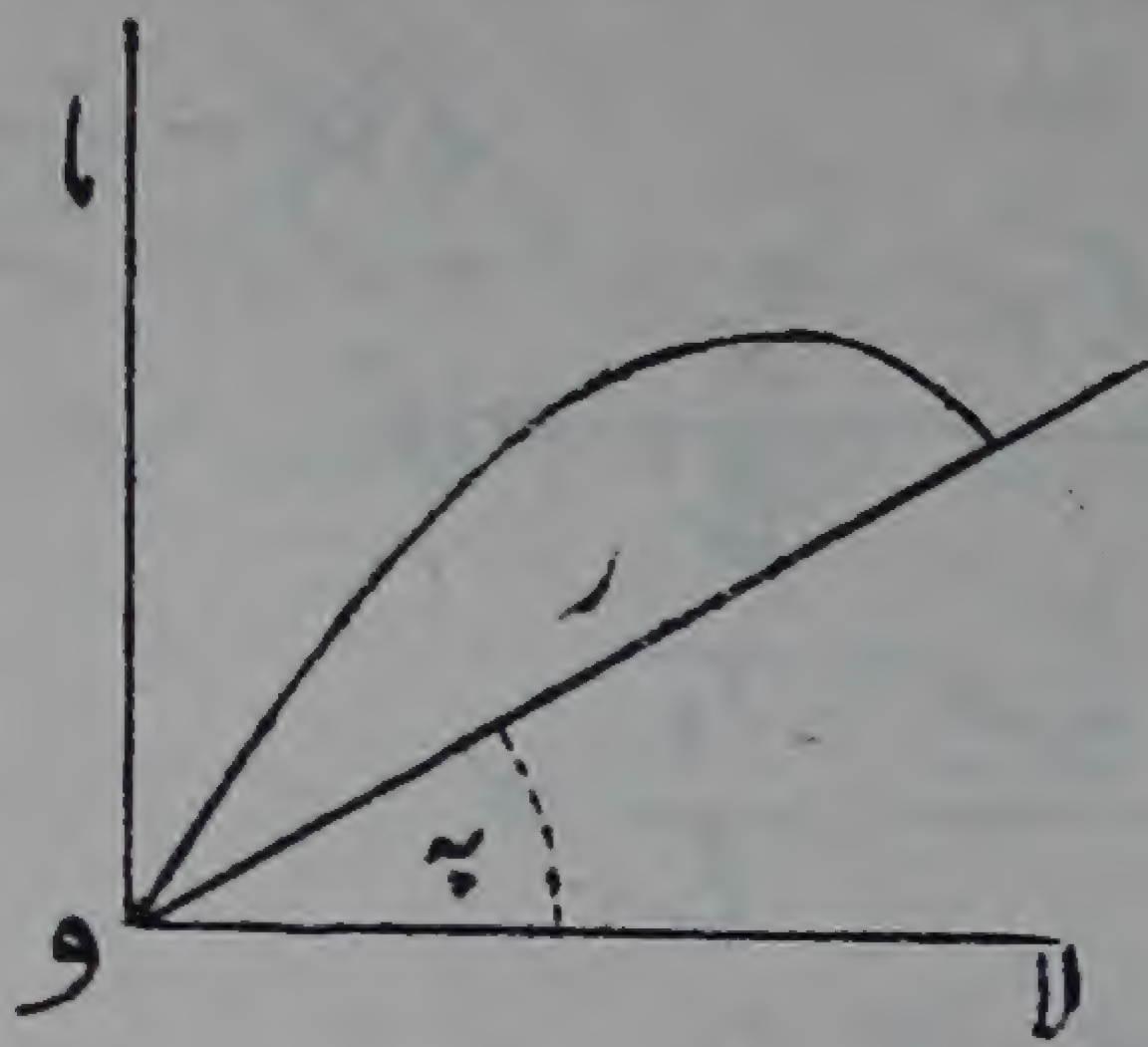
افقی مستوی پر پیہ حاصل کرنے کے لئے وہ نقطہ معلوم کرنا چاہئے
 جس میں یہ مکانی خط ما = کو قطع کرتا ہے۔ مساوات (۵۸) میں ما =
 رکھنے سے ہمیں فوراً حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \frac{2 \text{ و } 2 \text{ جم}^2 \text{ عہ}}{\text{ج}} \text{ مس عہ} = \frac{\text{واجب عہ}}{\text{ج}}$$

جو دفعہ ۱۶۸ میں حاصل شدہ قیمت کے مطابق ہے۔

پیہ مال مستوی پر

۱۷۱۔ فرض کرو کہ مری کو نقطہ رمیدگی و میں سے گزرنے والے



ایک مائل مستوی پر پھینکا گیا ہے۔
فرض کرو کہ اس مستوی کا میلان
افق کے ساتھ یہ ہے اور فرض
کرو کہ اس مستوی پر مرمی کا ٹپہ رہے۔
پس اس نقطہ کے محدود جس پر مرمی
مستوی سے ٹکراتا ہے

لا = رجم بہ، ما = رجب بہ

ہونے چاہئیں۔

یہ نقطہ قطع مکانی پر ہونا چاہئے

اور اس لیے اس کے محدودوں کو مساوات (۵۸) پوری کرنی چاہئے۔ ان
محدودوں کو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{رجب بہ} = \text{رسم عہ جم بہ} - \frac{\text{ج رجم بہ}}{\text{ج و ۲ جم عہ}}$$

جس سے ٹپہ کی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے:

$$ر = \frac{\text{ج و ۲ جم عہ جب (عہ بہ)}}{\text{ج رجم بہ}} \dots \dots (۶۰)$$

چونکہ ۲ جم عہ جب (عہ بہ) = جب (۲ عہ بہ) - جب بہ ... (۶۱)
اس لیے ظاہر ہے کہ اگر صرف عہ کو بدلنے دیا جائے تو ٹپہ ر اعظم ہوگا جبکہ
جب (۲ عہ بہ) اعظم ہو یعنی جبکہ وہ اکائی کے مساوی ہو۔ اس قیمت
کو حاصل کرنے کے لئے ہم رکھتے ہیں

$$\frac{\text{عہ}}{۲} + \frac{\text{لا}}{۴} = \text{عہ}$$

(۶۱) اس لیے اعظم ٹپہ حاصل کرنے کے لئے ہم مرمی کو اس سمت میں
پھینکتے ہیں جو مائل مستوی اور انتصابی کے درمیانی زاویہ کی تقصیف کرتی ہے۔
جب رمیدگی اس سمت میں واقع ہوتی ہے تو اعظم ٹپہ مساوات

(۶۰) سے حاصل شدہ ر کی قیمت میں جب (۲عہ - بی) = ۱ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔ چنانچہ

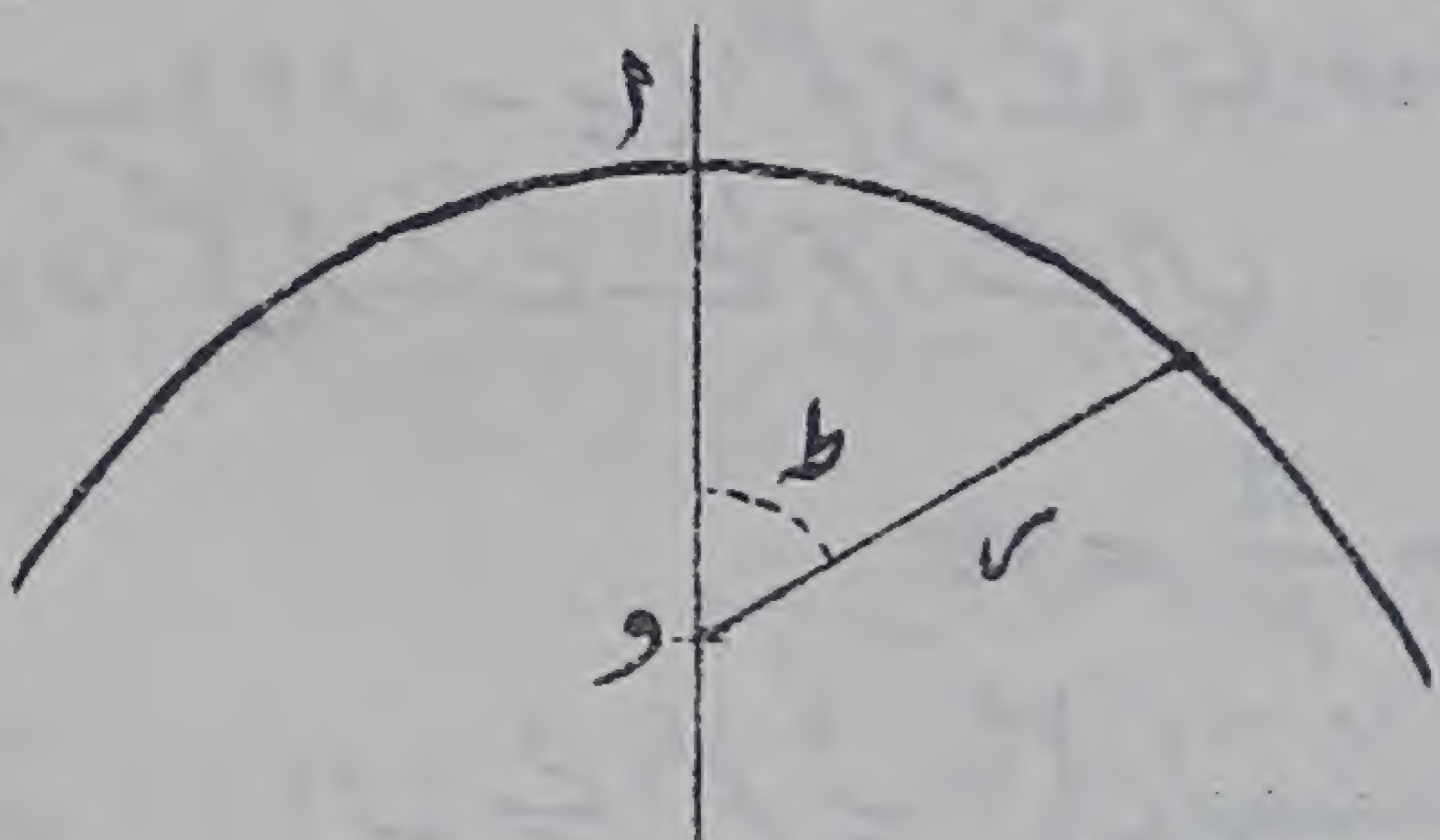
$$\begin{aligned}
 & \frac{2 \text{ جم عہ جب (عہ - بی)}}{\text{جم}^2 \text{ بی}} = \frac{2}{\text{ج}} = \text{ک} \\
 & \frac{\text{جب (۲عہ - بی) - جب بی}}{\text{جم}^2 \text{ بی}} = \frac{2}{\text{ج}} = \\
 & \frac{۱ - \text{جب بی}}{\text{جم}^2 \text{ بی}} = \frac{2}{\text{ج}} = \\
 & \frac{\text{ج (۱ + جب بی)}}{\text{جم}^2 \text{ بی}} = \text{ک}
 \end{aligned}$$

(۶۲)

۱۶۲۔ اس مساوات سے وہ بڑے سے بڑا فاصلہ معلوم ہو سکتا ہے جو مری کسی سمت میں طے کر سکتا ہے جبکہ اس کو رفتار و سے پھینکا گیا ہو۔ فرض کرو کہ ہم بی کی بجائے $\frac{1}{2}$ طے رکھتے ہیں اور اس لیے طہ وہ زاویہ ہے جو مری کی سمت انتصابی کے ساتھ بنتا ہے۔ اب ک اور طہ میں ربط ہے

$$\frac{\text{ج (۱ + جم طہ)}}{\text{جم}^2 \text{ بی}} = \text{ک} \quad (۶۳) \dots \dots \dots$$

اس کو قطبی محدودوں ک، ط میں مساوات سمجھنے سے صریحاً یہ ایک ایسے منحنی کی مساوات ہے کہ اس کے اندر کسی نقطہ پر ہم ایک مری کے ذریعہ جو رفتار و سے فارک کیا گیا ہو ضرب لگا سکتے ہیں لیکن اس کے باہر کسی نقطہ تک مری کو نہیں پہنچا سکتے۔ ہم جانتے ہیں کہ وتر خاص ل کے قطع مکانی کی قطبی مساوات اس کے واسطے اور محور کے حوالے سے سب ذیل ہے:



شکل (۱۲۱)

$$\frac{1}{2} L = \sqrt{1 + \text{جم طہ}}$$

اس کا مقابلہ مساوات (۶۳) کے ساتھ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات ایک قطع مکانی کو تعبیر کرتی ہے جس کا ماسکہ نقطہ رمیدگی ہے اور محور انتصابی ہے اور نیم وتر خاص $\frac{2}{3}$ ہے۔

راستوں کا لفاف

(۲۱۱)

۳۷۱۔ اگر ہم ان تمام مکانیوں کا تصور کریں جن کو مری جو نقطہ و سے رفتار و کے ساتھ فائر کیے گئے ہوں مرسم کرتے ہیں تو ہمیں شکل (۱۲۲) کے مشابہ ایک شکل حاصل ہوگی۔ بیرونی جلی منحنی صریحاً ان نقطوں کو جن پر مری پہنچ سکتے ہیں ان نقطوں سے جن پر مری نہیں پہنچ سکتے جدا کرتا ہے۔ اس لیے یہ وہ مکانی ہے جس کی مساوات (۶۳) سے حاصل ہوتی ہے۔ شکل (۱۲۲) کے مطالعہ سے یہ معلوم ہوگا کہ یہ منحنی مکانیوں



شکل (۱۲۲)

۳۷۲۔ اس نظام کا لفاف ہے جو فائر کرنے کی مختلف سمتوں کے متناظر ہیں۔ مکانیوں کے نظام کا لفاف تحلیلی طریقوں کے ذریعہ نسبتاً زیادہ راست طریقہ پر معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اگر ہم مساوات (۵۸) میں مس عہ کی بجائے م لکھیں تو نظام کے ایک مکانی کی مساوات شکل

$$م = لا - \frac{ج لا^2}{2} - \frac{ج لا^2}{2} (م + 1)$$

میں حاصل ہوتی ہے اور پورا نظام، م کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے۔
وہ شرط کہ اس مساوات کی اصلیں م میں مساوی ہوں یہ ہے کہ

$$لا^2 = \frac{ج لا^2}{2} - \frac{ج لا^2}{2} (م + 1)$$

جس کو شکل

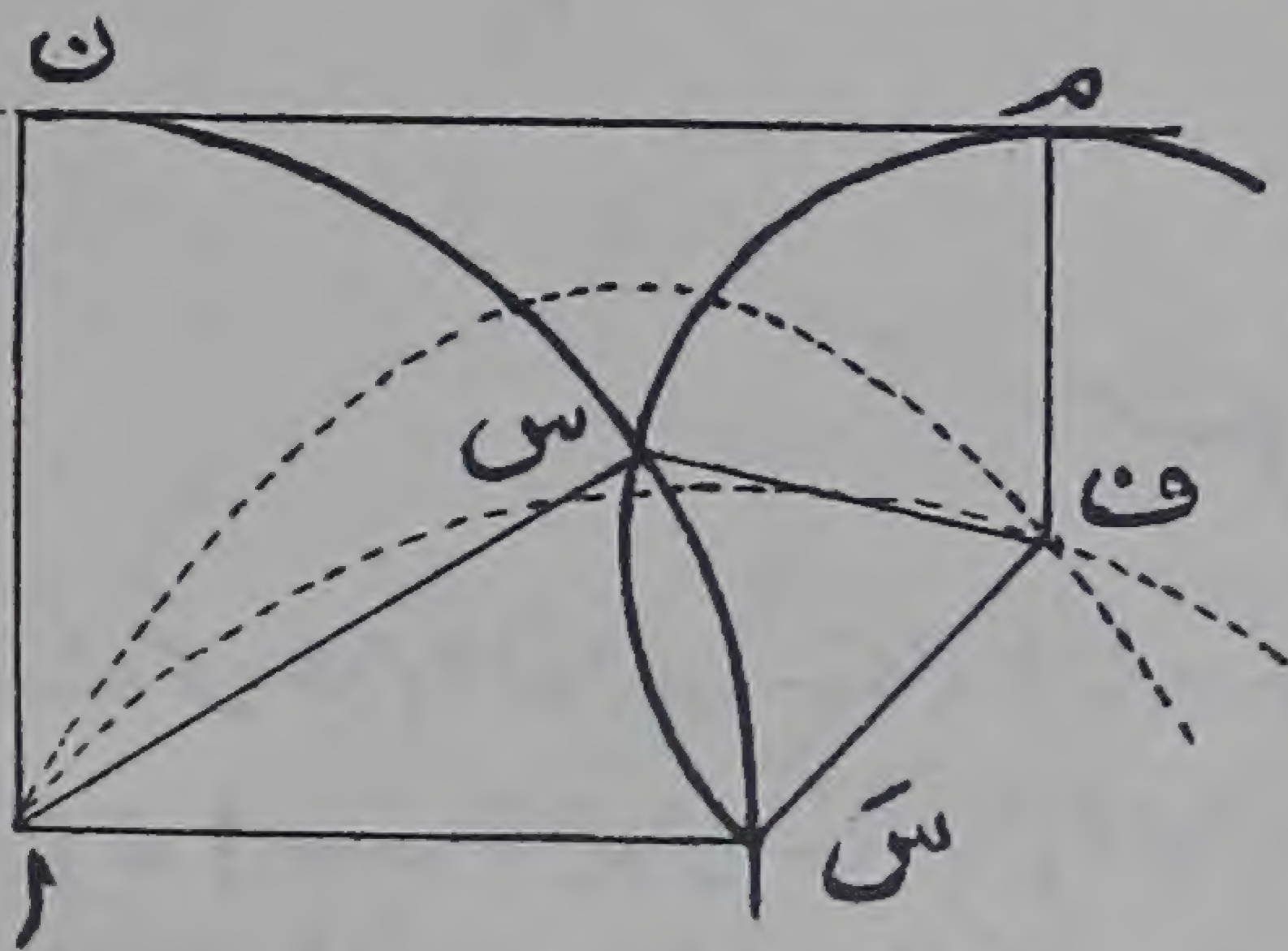
$$لا^2 = \frac{ج لا^2}{2} - \frac{ج لا^2}{2} (م + 1) \dots \dots \dots (۶۴)$$

میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔

اگر لا، م اس مساوات کو پورا کریں تو دو مکانی جن میں لا انتہا کم
فرق ہے نقطہ لا، م میں سے گزرتے ہیں اور اس لیے لفاف پر کا ایک
نقطہ لا، م ہے۔ اس طرح مساوات (۶۴) لفاف کی مساوات ہے اور
اس سے وہی مکانی لفاف حاصل ہوتا ہے جو قبل ازیں حاصل کیا جا چکا ہے۔
۱۷۵۔ مکافیوں کے نظام کا لفاف معلوم کرنے کا ایک بہت سادہ
ہندسی طریقہ بھی ہے۔

(۲۱۲)

اولاً ہم دیکھتے ہیں کہ جب سب مریمیوں کو ایک ہی نقطہ و سے
رقار و کے ساتھ فائر کیا جاتا ہے
تو ان کے راستوں کا ایک ہی مرتب
ن م (شکل ۱۲۳) ہونا چاہئے۔
فرض کرو کہ نظام کے کوئی
دو مکانی، ف، پر متقاطع ہوتے
ہیں اور فرض کرو کہ ان کے ماسکے
س، س، ہیں۔ فرض کرو کہ
ا، ف سے مرتب پر عمود علی الترتیب



شکل (۱۲۳)

ان 'ف' م ہیں۔
 اب اس = اس کیونکہ ان میں سے ہر ایک ان کے
 مساوی ہے نیز ف = ف کیونکہ ہر ایک ف م کے مساوی
 ہے۔ اس لئے اس اور اس 'ان' دو دائروں کے نقاط تقاطع ہیں جن کے
 مرکز 'ف' ہیں۔

اگر ان دو مکافیوں کو متصلہ فرض کیا جائے تو ان کے ماسکے س
 س متصلہ نقطے ہوں گے اور اس لئے مذکورہ بالا دو دائرے س کرینگے
 اور اس ف انتہا میں ایک خط مستقیم ہوگا۔ پس اس صورت میں
 'ف' = اس + س ف

$$= ان + ف م$$

= نقطہ ف سے ایک ایسے ثابت افقی خط پر

عمود جو م ن کے اوپر فاصلہ ان پر ہے۔

پس نقطہ ف یہ شرط پوری کرتا ہے کہ اس کا فاصلہ اس ثابت خط
 سے اس فاصلہ کے مساوی ہے جو اس کے اور ثابت نقطہ کے درمیان ہے۔
 اس لیے ف ہمیشہ ایک خاص مکانی پر رہتا ہے جس کا ماسکہ اس ہے۔
 لیکن ف ہمیشہ لفاف کا ایک نقطہ بھی ہے جہاں یہ لفاف نظام کے
 دو دو متصلہ مکافیوں کے نقاط تقاطع کا طریق ہے۔ اس لیے لفاف وہ
 مکانی ہے جو ابھی اوپر حاصل ہو چکا ہے اور جس کا ماسکہ اس ہے۔ یہ مکانی
 وہی مکانی ہے جو قبل ازیں حاصل ہو چکا ہے۔

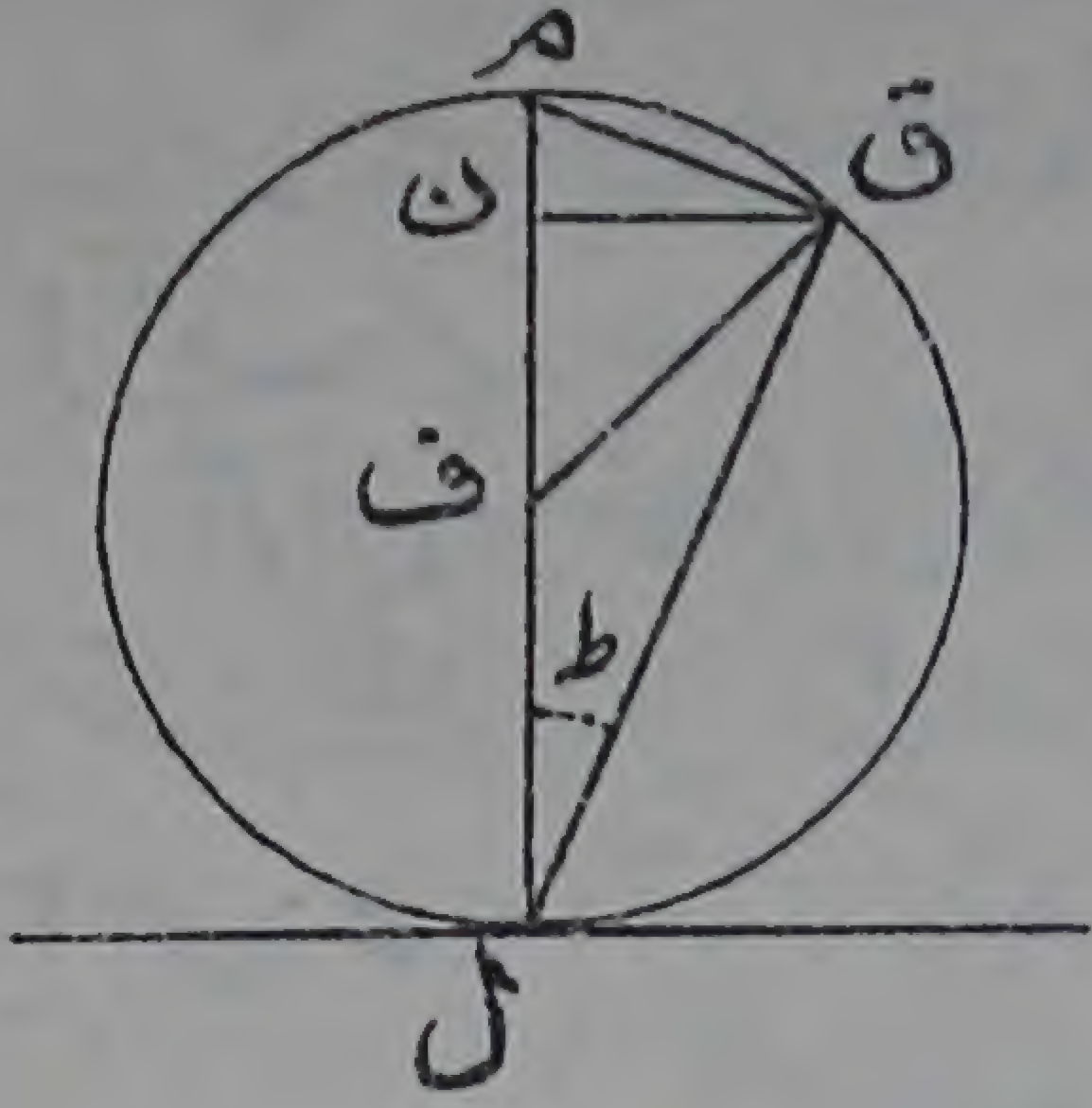
توضیح مثالیں

(۲۱۳)

۱۔ ایک گاڑی ہموار سڑک پر رفتار و سے دوڑتی ہے اور اسکے
 پیہیوں کے پٹوں سے کیچڑ کے ذرات خارج ہوتے ہیں۔ وہ بڑے سے
 بڑا ارتفاع معلوم کرو جس تک ان میں سے کوئی ذرہ اچھلیگا۔

فرض کرو کہ پیسہ کا نصف قطر ۱ ہے تو ہم دیکھ چکے ہیں (صفحہ ۱۳) کہ کوئی

نقطہ ق رفتار و \times ق ل ل سے
سمت ق م میں جو ق ل پر
عمود ہے حرکت کرتا ہے۔ ق سے
نکلے ہوئے کیچر کی رفتار یہی ہوگی۔
اگر زاویہ ق ل ف ط
ہو تو زمین کے اوپر جس ارتفاع سے
کیچر نکلتا ہے وہ



ل ن = ل ف + ف ن = ۱ (۱ + جم ط)
ہے اور اس کی رفتار کا انتصابی جزو ترکیبی

شکل (۱۲۴)

و (ق ل ل) جب ط = ۲ و جب ط جم ط = و جب ط ۲ ط
ہے۔ کیچر جو اس انتصابی رفتار سے نکلتا ہے مزید انتصابی ارتفاع

(و جب ط ۲ ط)
ج ۲

حاصل کرتا ہے اور اس لیے کل ارتفاع جہاں تک کیچر پہنچتا ہے

$$۱ + ۱ + جم ط ۲ ط + \frac{۱}{ج ۲} جب ط ۲ ط$$

ہے۔ اس کو جم ط ۲ ط کے ایک دو درجی تفاعل کے طور پر شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے

$$(۱ + \frac{۱}{ج ۲}) - \frac{۱}{ج ۲} جم ط ۲ ط + ۱ جم ط ۲ ط$$

$$= (۱ + \frac{۱}{ج ۲}) + \frac{۱}{ج ۲} - \frac{۱}{ج ۲} [جم ط ۲ ط - \frac{۱}{ج ۲}]$$

اس جملہ کی اعظم قیمت جبکہ ط بدلے اس وقت واقع ہوتی ہے

$$جب ط ۲ ط = \frac{۱}{ج ۲} بشرطیکہ جم ط ۲ ط کے لیے یہ قیمت اختیار کرنا ممکن ہو$$

یعنی بشرطیکہ $و^2 > 1$ ج۔ اس صورت میں اعظم ارتفاع زمین کے اوپر

$$1 + \frac{و^2}{2ج} = \frac{1ج}{و^2} + \frac{(1ج + و^2)}{2ج}$$

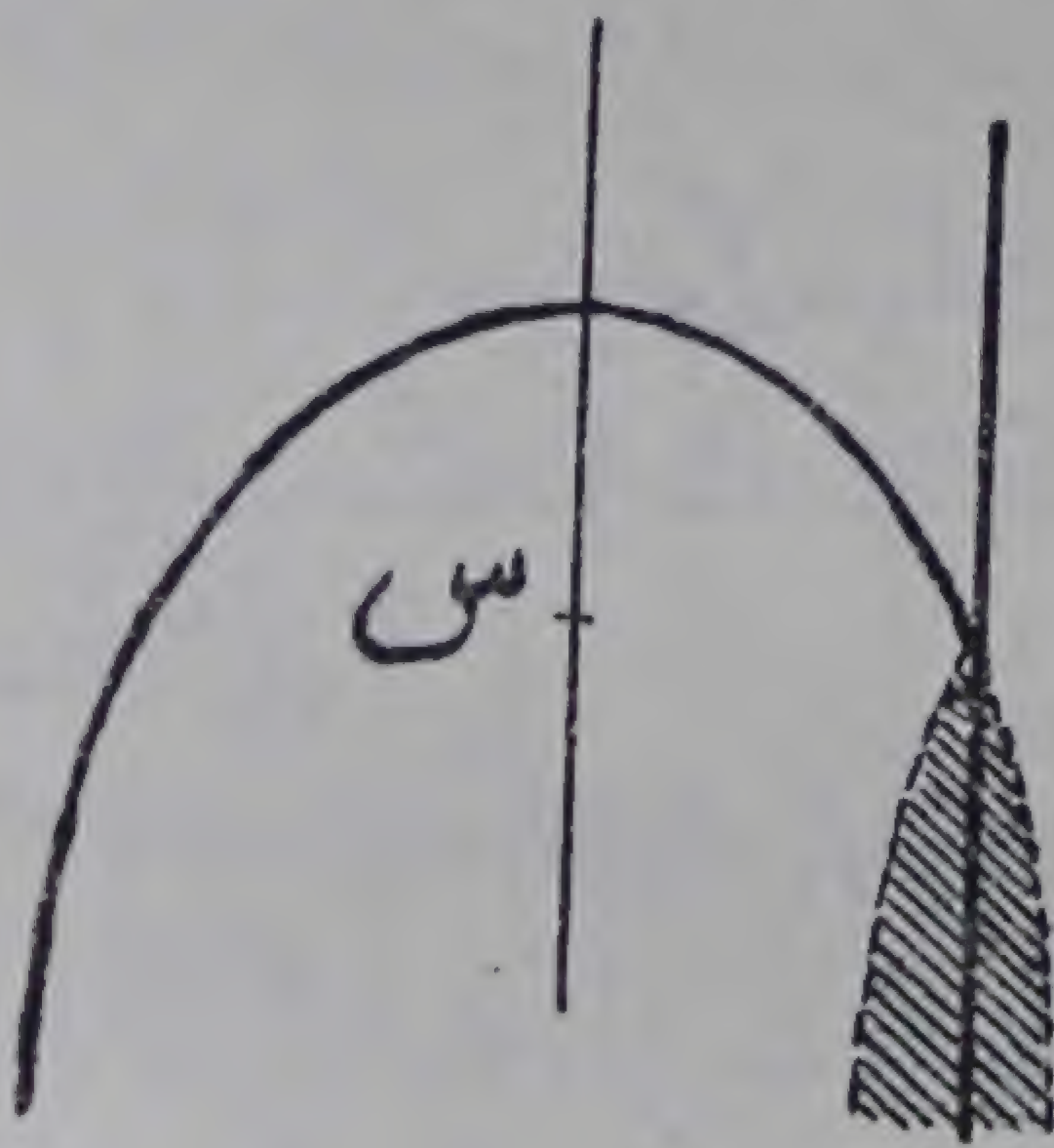
ہے۔

لیکن اگر $و^2 > 1$ ج تو ہم [جم ۲ طہ۔ $\frac{1ج}{و^2}$] کو معدوم نہیں کر سکتے

اس لیے ہم اس کو حتی الامکان چھوٹا بناتے ہیں اور اس لیے جم ۲ طہ = ۱ لیتے ہیں۔
اس طرح کیچر جو بلند ترین نقطہ تک پہنچتا ہے وہ ہے جو یہیہ کے سب سے اوپر کے
نقطہ م سے نکلتا ہے اور صریحاً وہ اپنے ابتدائی نقطہ سے بلند تر ہرگز نہیں اچھلتا۔

۲۔ ایک اگن ہوز رفتار و سے پانی پھینکتا ہے اور اس سے

ف فاصلہ پر ایک انتصابی دیوار ہے۔ معلوم کرو کہ دیوار کا کتنا رقبہ
تر ہو گا۔



شکل (۱۲۵)

فرض کرو کہ اگن ہوز کا دھانہ س ہے
اور فرض کرو کہ وہ پانی کے ذرات
کسی سمت میں رفتار و سے پھینک
سکتا ہے۔ وہ نقطے جن تک پانی
پہنچ سکتا ہے حسب دفعہ ۱، ۲ وہ تمام
نقطے ہوں گے جو ایک گردش میں کافی نا
کے اندر واقع ہوں گے جس کا محور

انتصابی ماسک س اور وتر خاص $\frac{و^2}{2ج}$ ہے۔ اگر ہم س کو سیدائیں اور
س میں گزرنے والے انتصابی خط کو محوری فرض کریں تو اس مکانی مساوات ہوگی

$$(لا + ما) = \frac{و^2}{2ج} \left(ی - \frac{و^2}{2ج} \right)$$

دیوار کی مساوات ما = ف لیجا سکتی ہے اور وہ منحنی جس میں یہ مکانی تا دیوار کو

قطع کرتا ہے

$$لا + ف^۲ = \frac{و^۲}{ج} - \left(\frac{و^۲}{ج} - ی \right)$$

$$یا \quad لا = \frac{و^۲}{ج} - \left(\frac{و^۲}{ج} - \frac{ف^۲}{و^۲} - ی \right)$$

ہے۔ یہ مساوات ایک قطع مکانی کی مساوات ہے جس کا وتر خاص $\frac{و^۲}{ج}$ ہے، محور انتصابی ہے اور راس، مس کے اوپر ارتقاع

$$\frac{و^۲}{ج} - \frac{ف^۲}{و^۲}$$

پر ہے۔ اس قطع مکانی کے اندر کے سب نقطے پانی کی دیوار کے حدود کے اندر واقع ہوں گے اور وہ نقطے جو اس مکانی کے باہر ہوں گے ناقابل رسائی ہوں گے۔

مثالیں

۱۔ ایک ریوالور کو ۱۰۰ فٹ بلند مینار کے سرے سے افقاً فائر کیا گیا ہے اور گولی ریوالور کے دہانے سے رفتار ۶۰۰ فٹ فی ثانیہ سے نکلتی ہے۔ گولی زمین پر کس جگہ لگیگی؟

۲۔ ایک گولی جس کو ایک تالاب کی سطح کے اوپر ۱۰ فٹ ارتفاع سے افقاً فائر کیا گیا ہے پانی سے ۵۰۰ گز کے فاصلہ پر ٹکراتی ہے۔ اس کی رفتار فٹوں میں فی ثانیہ معلوم کرو اگر ہوا کی مزاحمت ناقابل قدر ہو۔

۳۔ ثابت کرو کہ کسی بندوق کے متعلق یہ دعوے کرنا کہ اس کی گولی ۵۰۰ گز کے پٹھ میں ایک انچ سے زیادہ نہیں چڑھتی اس بات کو مستلزم ہے کہ رفتار ۲۰۰۰ فٹ فی ثانیہ سے بڑی ہونی چاہئے۔

۴۔ کرکٹ کا گولہ ایک افقی مستوی پر ۱۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پھینکا گیا ہے۔ بڑے سے بڑا پٹھ معلوم کرو۔

۵۔ ایک بندوق ہے جس کا دہانہ زمین سے قریب ہے۔ اس بندوق سے

ایک گولی فائر کی گئی ہے جو ۶ فٹ لمبے آدمی کے اوپر سے جو ۱۰ گز دور کھڑا ہے عین گزر جاتی ہے اور خود زمین میں ایک چوتھائی میل دور دفن ہو جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ گولی زمین کے اوپر جس بلندی تک اُڑتی ہے وہ یقیناً ۲۲ گز سے بڑی ہے۔

۶۔ ایک مرمی کا اعظم افقی پٹہ ۲۵۶ فٹ ہے۔ اس کو پھینکنے کی رفتار کیا ہے۔ اگر اس کو اس رفتار سے ۲۴ فٹ بلند غلام گردش کے فرش پر کے ایک نقطہ سے پھینکا جائے تو اس کا بڑے سے بڑا پٹہ کیا ہوگا اگر وہ چھت سے نہ ٹکرائے اور غلام گردش کافی طویل ہو۔

۷۔ ثابت کرو کہ ۲۰ میل پٹہ کے لیے مطلوبہ رفتار کم از کم ۸۴۰ فٹ فی ثانیہ ہوگی اور مرمی کے پرواز کا وقت ۸۱.۳ ثانیے ہوگا۔

۸۔ مثال ماسبق میں ۲۰ میل پٹہ کے لیے بارود کی بھرن معلوم کرو یہ فرض کر کے کہ گولے کا وزن ایک ٹن ہے اور بارود کی طاقت ۱۰۰ فٹ ٹن (فی پونڈ بارود) کی قوت پیدا کر سکتی ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مرمی کو رفتار v سے ایک ہموار مستوی کے اوپر ارتفاع F سے زاویہ θ پر پھینکا جائے تو اس کا پٹہ s مساوات

$$2(F + v^2 \sin^2 \theta) = g s^2$$

سے حاصل ہوگا۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ ایک ہموار مستوی کا وہ رقبہ جو اس توپ کی زد میں ہو جو مستوی کے اوپر ارتفاع F پر ہے F کے ساتھ متناسباً بڑھتا ہے اور

$$A + 2F = \frac{v^2}{g}$$

کے مساوی ہے جہاں A وہ رقبہ ہے جو زد میں ہوتا ہے جبکہ توپ مستوی کی ہمواری پر ہوتی ہے۔

۱۱۔ ایک مرمی کو ایک قلعہ سے جو افقی مستوی کے اوپر ۳۰۰ فٹ بلند ہے ۲۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے فائر کیا جاسکتا ہے۔ معلوم کرو کہ مستوی کا کتنا رقبہ زد میں رہتا ہے۔

۱۲۔ ضلع A کے ایک منتظم مسدس کو انتصائاً اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا

ایک کنارہ ایک افقی مینر پر لٹکا ہوا ہے۔ ایک ذرہ کو اس طریقہ سے پھینکا گیا کہ وہ اس سس کے چار اوپر کے کونوں کو عین چاٹتے ہوئے گزر جاتا ہے۔ ذرہ کی پروا میں بلند ترین نقطہ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ مینر پر پٹہ ۱۶۷ ہے۔

۱۳۔ ایک مشین گن کو ایک مسلح ٹرین پر نصب کیا گیا ہے۔ ٹرین افقی پٹریوں پر رفتار و سے دوڑتی ہے اور توپ کے دھانے سے گولے رفتار و سے نکلتے ہیں۔ بڑے سے بڑا پٹہ معلوم کرو

(۱) ٹرین کے سامنے

(ب) ٹرین کے پیچھے

عام مثالیں

۱۔ ایک ٹرین ۶۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہی ہے اور وہ ایک منحنی پر پہنچتی ہے جس کا نصف قطر تین چوتھائی میل ہے۔ ٹرین میں دیوار پر ایک کال چکنا افقی تختہ لگا ہے جس کا کنارہ پٹریوں کے متوازی ہے اور اس جانب ہے جو منحنی کے مرکز سے دور ہے۔ تختہ پر ایک چھوٹی چیز اس کے کنارے سے ۸ انچ فاصلے پر اسٹادہ ہے۔ ثابت کرو کہ یہ چیز تختہ سے گر جائے گی جبکہ وہ ڈبہ جس میں چیز ہے منحنی کا تقریباً ۲۴ گز فاصلہ طے کرے گا۔ اس کی افقی رفتار معلوم کرو جبکہ وہ تختے کو چھوڑتی ہے۔

۲۔ ایک غبارہ ایسی چال سے اوپر وار حرکت کر رہا ہے جو ہر ثانیہ میں ۴ فٹ فی ثانیہ کی شرح سے بڑھ رہی ہے۔ معلوم کرو کہ ۱۰ پونڈ کے ایک جسم کا وزن جبکہ اس کو کھانی دار ترازو کے ذریعہ غبارے میں معلوم کیا جائے اس وزن سے کتنا فرق رکھیگا جو معمولی حالات میں حاصل ہوتا ہے۔

۳۔ ایٹوڈ کی مشین ترازو کے ایک پلرے پر رکھی گئی ہے اور مشین کی ڈوری کو کلب کے ذریعہ حرکت کرنے سے روکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کلب کو جدا کرتے ہی مشین کا ظاہری وزن بقدر

$$\frac{(k - k')}{k + k'}$$

کے تخفیف ہوگا جہاں کہ لگے ہوئے وزن ہیں۔
۴۔ طول ل اور وزن و کی ایک ایکساں زنجیر ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی
ہے اور اس کی ہر جانب انتصاباً لگتی ہے۔ اگر زنجیر آزادانہ حرکت کر رہی ہو تو ثابت
کرو کہ جب ایک جانب اس کا طول لا ہوتا ہے تو کھونٹی پر دیاؤ

$$\frac{۴ لا (ل - لا)}{۲}$$

۵۔ ایک ٹل سے پانی کی دھار زمین تک انتصاباً گرتی ہے اور اس کی ابتدائی
رفتار قابل نظر انداز ہے۔ ثابت کرو کہ اس پانی کا مرکز ثقل جو کسی آن ہوا میں رہتا
ہے زمین سے اوپر اس فاصلہ کا دو تہائی ہے جو زمین اور ٹل کے درمیان ہے۔
۶۔ وزن و کی ایک وزنی ایکساں زنجیر کو ایک ڈوری سے باندھ کر
ڈوری کو تناؤ ت سے اوپر اٹھایا گیا ہے۔ زنجیر کے کسی نقطہ پر تناؤ دریافت کرو۔
۷۔ ایک زنجیر ف ٹن کا مستقل بوجھ برداشت کر سکتی ہے۔ ثابت کرو کہ
سکون سے سکون تک کم سے کم وقت جس میں زنجیر و ٹن کے ایک وزن کو انتصاباً
فاصلہ ف میں سے اٹھا اور اتار سکتی ہے

$$\frac{۲۲}{۲۷} \frac{ف}{و} \text{ ثانیے}$$

ہوگا۔

۸۔ چرخوں کے ایک نظام میں ایک ثابت اور ایک حرکت پذیر قالب
ہے۔ رسی حرکت پذیر قالب کے محور سے بندھی ہے اور اس کے بعد ثابت
قالب پر سے گذرتی ہے اور پھر حرکت پذیر قالب کے نیچے سے اور پھر ثابت قالب
پر سے۔ وزن ف معلوم کرو جس کو اگر رسی سے باندھ دیا جائے تو وہ معلومہ وزن
کو جو حرکت پذیر قالب سے بندھا ہے سہارا سکے۔ (قالب اس قدر چھوٹے ہیں کہ
رسی کے تمام سیدھے حصوں کو متوازی خیال کیا جاسکتا ہے)۔
اگر اوزان متوازن نہ ہوں تو ثابت کرو کہ و کا نیچے وارہ اسراع

$$\frac{9-3}{9+9} \text{ ج}$$

ہوگا جب کہ رسی کے وزن کو نظر انداز کر دیا گیا ہو اور حرکت پذیر قالب کا وزن و میں شامل ہو۔

۹۔ ایک چرخہ جو کل بوجھ و کو ہمارے ہوئے ہے رسی کے ایک طبقہ میں لٹکائی گئی ہے یہ رسی دو ثابت چرخوں پر سے گذرتی ہے اور اس کے سروں سے اوزان و ورق آزادانہ لٹک رہے ہیں۔ رسی کا ہر حصہ انتصابی ہے۔ ثابت کرو کہ جب اس نظام کو چھوڑ دیا جاتا ہے تو و ساکن رہے گا یا ایکساں رفتار سے حرکت کریگا بشرطیکہ $\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega} = \frac{2}{\omega}$ اور کہیں رگڑ نہ ہو۔

اگر یہ ربط موجود نہ ہو تو و کا اسراع معلوم کرو۔

۱۰۔ ایک ذرہ جو باذیہ کے تحت گر رہا ہے کسی خاص ثنائی میں ۱۰۰ فٹ طے کرتا ہے۔ اس کے بعد ۱۰۰ فٹ طے کرنے میں اسے کتنا وقت لگیگا۔ ہوا کی مزاحمت نظر انداز کی گئی ہے۔

اگر مزاحمت کی وجہ سے وقت ۹ ثانیہ لگے تو مزاحمت (مستقل فرض کردہ) کی نسبت ذرہ کے وزن کے ساتھ معلوم کرو۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ کسی منحنی سے کسی دوسرے منحنی تک (جو اسی انتصابی مستوی میں ہے) سریع ترین اتار کا خط ان منحنیوں کے ان نقطوں پر کے عمادوں کے ساتھ مساوی زاوے بناتا ہے جن پر وہ ان سے ملتا ہے۔

۱۲۔ ایک انتصابی دائرے کے محیط پر اس نقطہ کا محل معلوم کرو کہ اس سے مرکز تک خط مستقیم میں اتار کا وقت وہی ہو جو زیر ترین نقطہ تک اتار میں صرف ہوتا ہے۔

۱۳۔ ماسک سے کافی تک تیز ترین اتار کا خط معلوم کرو جبکہ کافی کا محور انتصابی ہو اور اس اوپر وار۔ نیز ثابت کرو کہ اس خط کا طول وتر خاص کے مساوی ہے۔

۱۴۔ ایک ناقص کو اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ اس کا محور اعظم انتصابی ہے۔

وہ قطر معلوم کرو جس کے نیچے کوئی ذرہ کم سے کم وقت میں گر سکتا ہے۔ خروج المرکز کی کم سے کم کیا قیمت ہے تاکہ یہ قطر محور اعظم نہ ہو سکے۔

۱۵۔ ایک گولی کو ایک انتصابی نشانہ پر فائر کرنا مقصود ہے تاکہ وہ نشانہ پر علی القواٹم ٹکرائے۔ اگر گولی کی رفتار و ہو اور فائرنگ کے نقطے سے نشانے

کا فاصلہ ۱ ہو تو ثابت کرو کہ گولی کا زاویہ ارتفاع $\frac{1}{2}$ جب $\left(\frac{12}{2}\right)$ ہونا چاہئے

اور ثابت کرو کہ نشانے کا وہ نقطہ جس پر ضرب پڑتی ہے اُس نقطہ کی بہ نسبت نصف ارتفاع پر ہو گا جس کی جانب نشانہ باندھا جاتا ہے۔

۱۶۔ ایک گولی کو ایک انتصابی نشانے پر فائر کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر گولی کو فائر کرنے والا شخص نشانے پر گولی کے ظل کو دیکھے تو ظل یکساں رفتار سے حرکت کرتا نظر آئے گا۔

۱۷۔ ایک بندوق دو گولیوں کو فائر کرتی ہے، ایک کو رفتار و کے ساتھ نہ او یہ ارتفاع عہ پر اور دوسری کو رفتار و کے ساتھ زاویہ ارتفاع عہ پر (عہ کے عہ) اور گولیاں ایک ہی انتصابی مستوی میں جاتی ہیں۔ ثابت کرو کہ گولیاں ٹکرائیں گی اگر فائرنگ کے درمیان وقفہ

$$\frac{2}{ج} \text{ و جب (عہ - عہ) } \\ \text{ج و جب عہ + و جب عہ}$$

ہے۔

۱۸۔ ا، ب، ج، ایک افقی خط میں ترتیب وار تین نقطے ہیں اور ا ب ۶۴ فٹ ہے۔ ایک ذرہ کو ا سے رفتار ۳۹۰ فٹ فی ثانیہ سے اُس سمت میں

پھینکا گیا ہے جو ا ج کے ساتھ زاویہ سس $\frac{5}{12}$ بناتی ہے۔ اسی آن ایک دوسرے ذرہ کو ب سے رفتار ۲۵۰ فٹ فی ثانیہ سے اُس سمت میں پھینکا گیا ہے جو ب ج کے ساتھ زاویہ سس $\frac{3}{4}$ بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ یہ ذرے

ٹکرائیں گے، نیز معلوم کرو کہ کب اور کہاں؟

۱۹۔ ایک توپ ۴۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے گولے سر کرتی ہے۔ (۶۱۸)

ایک پہاڑی، سطح مستوی پر ۲۰۰ فٹ بلند ہے اور توپ مستوی کے اُس نقطہ سے ... اگز کے فاصلہ پر ہے جو پہاڑی کے سرے کے انتصایاً نیچے ہے۔ پہاڑی کے سرے کے عین پیچھے کتنا فاصلہ توپ کے گولوں سے محفوظ ہوگا۔

۲۰۔ ایک بندوق کی مکھیاں غلط نصب ہیں جس کی باعث گولی تین فیصدی زیادہ دور تک جاتی ہے بہ نسبت اُس فاصلے کے جو مکھیوں سے معلوم ہوتا ہے ایک نشانہ باز جو بندوق کی اس خطا سے واقف نہیں ہے ایک نشانہ باز جو ... اگز کے فاصلہ پر ہے نشانہ باندھتا ہے۔ اگر گولی کی رفتار ۱۲۰ فٹ فی ثانیہ ہو تو ثابت کرو کہ گولی نشانہ سے تقریباً ایک گز اوپر سے گزر جائے گی۔

۲۱۔ ایک بندوق کی مکھیاں درست ہیں اور ۱۰ فٹ فاصلہ پر کسی چیز پر نشانہ باندھنے کے لیے بندوق کو زاویہ θ تک اٹھانا پڑتا ہے۔ نشانہ باز کا ہاتھ تھکھرانے کی وجہ سے بندوق ان سمتوں میں رہتی ہے جو اصلی سمت سے چھوٹے زاویہ ϕ کے اندر کہیں واقع ہو سکتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر نشانہ باز گولیوں کو متواتر فائر کرے تو وہ نقطے جن پر گولیوں کی ضرب پڑے گی سب کے سب ایک چھوٹے قطع ناقص کے اندر واقع ہوں گے جس کے نیم محاورہ ϕ اور θ (۱-س) ہوں گے۔

جب $\theta = \frac{\pi}{2}$ تو اس قطع ناقص کا محور اصغر معدوم ہوتا ہے اور اس لیے گولیوں کو ایک خط مستقیم میں واقع ہونا چاہئے۔ اس نتیجہ کا مطلب بیان کرو۔

۲۲۔ ایک ذرہ سکون سے ایک چکنے کرہ کے بلند ترین نقطے سے اس کی بیرونی سطح پر نیچے وار پھسلتا ہے۔ وہ کرہ سے نقطہ F پر جدا ہوتا ہے اور فضاء میں ایک قطع مکانی مرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مکانی کے نقطہ F پر دائرہ انحناء مرتب کو مس کریگا۔

۲۳۔ ایک ذرہ کو ایک چکنے کرہ کی اندرونی سطح کے زیر ترین نقطے سے افتقاً پھینکا گیا ہے۔ وہ کرہ کی سطح سے نقطہ F پر جدا ہوتا ہے اور ایک قطع مکانی مرتسم کرنے کے بعد پھر کرہ سے نقطہ Q پر ٹکراتا ہے۔ ثابت کرو کہ FQ اور F پر کا محاس، انتصابی کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں۔

۲۴۔ ایک توپ کو ایک پہاڑی کے رُخ پر جو مستوی ہے نصب کیا گیا ہے۔
 ثابت کرو کہ وہ کل رقبہ جو توپ کی زد میں رہتا ہے ایک قطع ناقص ہے جس کا ماسکہ
 توپ پر ہے اور جس کا خروج المرکز پہاڑی کے میلان کی جیب ہے اور نیم وتر خاص اس
 ارتفاع کے نصف کے مساوی ہے جس تک گولی کی ابتدائی رفتار گولی کو لایا سکتی ہے۔
 ۲۵۔ ایک پہاڑی کا رُخ مستوی ہے اور اس کا میلان α ہے۔ ایک
 توپ کو پہاڑی پر کے ایک قلعہ پر جس کا ارتفاع x ہے نصب کیا گیا ہے۔
 ثابت کرو کہ پہاڑی کے مستوی رُخ کا وہ رقبہ جو توپ کی زد میں رہتا ہے

$$22r(r + x \sin \alpha) \text{ قطاعہ}$$

ہے جہاں گولی کی ابتدائی رفتار r ج رہے۔

۲۶۔ ایک کروئی خول جس کی کمیت k ہے پھٹ پڑتا ہے جبکہ وہ زمین کے
 اوپر ف ارتفاع پر ناقابل قدر رفتار سے حرکت کر رہا ہے۔ خول بہت چھوٹے
 ذرات میں منقسم ہو جاتا ہے اور ان میں سے ہر ذرہ کرہ کے مرکز سے رفتار u کے
 ساتھ مرکز سے دور حرکت کرتا ہے اور بالآخر زمین پر گر جاتا ہے۔ ان ذروں کی کل
 کمیت معلوم کرو جو اس نقطہ سے جو خول کے انحصاراً نیچے ہے کسی مقررہ فاصلہ
 پر اکائی رقبہ میں ملیں گے۔

۲۷۔ ایک خول ہوا میں پھٹتا ہے اور اس کے تمام ذرے دھماکہ کی پائے
 مساوی رفتاریں حاصل کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ کسی آن ذرے ایک کرہ پر واقع
 ہوں گے اور ان کے راستوں کے ماسکے بھی ایک کرہ پر واقع ہوں گے اور اس
 ایک کرہ کا پر واقع ہوں گے۔

۲۸۔ ایک ذرہ ایک کھردرے مال مستوی AB کے نیچے پھیلتا ہے،
 وہ مستوی کے نقطہ A سے حالت سکون سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور
 مستوی کو نقطہ B پر چھوڑنے کے بعد آزادانہ ایک قطع مکافی مرتسم کرتا ہے۔
 اگر مرتسم مکافی کا ماسکہ s ہے تو ثابت کرو کہ زاویہ $\angle ASB = \frac{\pi}{2} + \alpha$
 جہاں α رگڑ کا زاویہ ہے۔

۲۹۔ ایک قلعہ سے پانی پر تیرنے والے ایک نشان کا مشاہدہ کیا گیا تو

معلوم ہوا کہ اس کا زاویہ انحراف افق کے نیچے θ ہے۔ اس نشان پر ایک توپ کو ارتفاع h پر فائر کیا گیا لیکن گولہ پانی پر اس نقطہ سے جا لگا جس کا انحراف θ تھا۔ ثابت کرو کہ نشان پر ضرب لگانے کے لیے گولے کو ارتفاع h پر فائر کرنا چاہئے جہاں

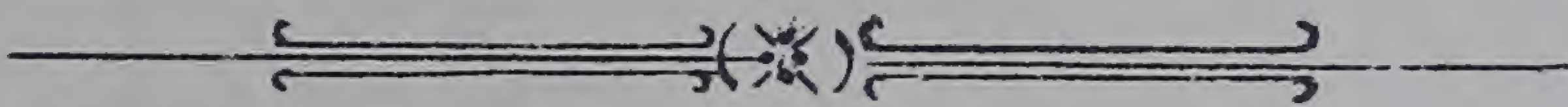
$$h = \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

$$h = \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

۳۔ ثابت کرو کہ کم سے کم توانائی جس کے ذریعہ ایک ذرہ کو ایک دیوار کے اوپر پھینکا جاسکتا ہے جب کہ دیوار پھینکنے کے نقطہ سے l فاصلہ پر ہو حسب ذیل ہے:-

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v^2 \sin^2 \theta + m g l$$

جہاں پھینکنے کے نقطہ پر دیوار کے سرے کا ارتفاع θ ہے۔
 ۳۱۔ نصف قطر r کا چمکی کا ایک پاٹ اس طرح گھومتا ہے کہ اس کی کور کی رفتار v ہے اور پاٹ کی کور سے آٹے کے ذرات نکلے ہیں ثابت کرو کہ ان کے راستوں کا لفاف ایک قطع مکانی ہے جس کا محور انتصابی ہے اور جس کا ماسکے پاٹ کے مرکز کے انتصاباً اوپر $\frac{r}{2}$ کے فاصلہ پر ہے۔



(۲۲۰)

نواں باب

ذروں کے نظاموں کی حرکت

حرکت کی مساواتیں

۱۷۶۔ اس باب میں ذروں کے نظاموں کی حرکت پر بحث کی جائے گی اور ان اعمال اور تعاملات کا بھی لحاظ رکھا جائے گا جو ذروں کے مختلف زوجوں کے درمیان وقوع پذیر ہو سکتے ہیں۔ ابتداً ان نتیجوں کو جو ایک ذرہ کے لئے حاصل ہو چکے ہیں اختصاراً بیان کرنا اور انہیں پہلے کی نسبت زیادہ تفصیلی شکل میں رکھنا سہولت بخش ہوگا۔

ایک واحد ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے کل نظام کا حاصل ایک واحد قوت ہونی چاہئے کیونکہ یہ سب قوتیں ایک نقطہ پر عمل کرتی ہیں۔ فرض کرو کہ ہم اس حاصل کو F سے تعبیر کرتے ہیں اور تین قائم محوروں کی سمت میں اس کے اجزائے ترکیبی کو F_x ، F_y ، F_z سے ظاہر کرتے ہیں۔

نیز چونکہ ذرہ کو ایک نقطہ سمجھا جاسکتا ہے اس لئے اس کا ایک موعین اسراع a ہونا چاہئے اور چونکہ a ایک سمتی ہے اس لئے اس اسراع کو محدود کرنے میں تین محوروں میں تین اجزائے ترکیبی a_x ، a_y ، a_z کا مرکب فرض کیا جاسکتا ہے۔

حرکت کے دوسرے قانون سے رشتہ

ف = ک ع

حاصل ہوتا ہے۔

لیکن حرکت کے دوسرے قانون سے اس سے کچھ زیادہ بھی معلوم ہوتا ہے اور وہ یہ کہ ف اور ع کی سمتیں ایک ہی ہیں۔ فرض کرو کہ اس واحد سمت کی سمتی جیوب التمام لہ، مہ، نہ ہیں تو

لا = لہ، ما = مہ، ع = نہ

اور نیز ع = لہ، ع = ما، مہ = ع، ع = نہ

ان رشتوں اور رشتہ (۶۵) کے ذریعہ حسب ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$$\left\{ \begin{array}{l} لا = ک ع \\ ما = ک ع \\ ع = ک ع \end{array} \right. \dots \dots \dots (۶۶)$$

یہ مساواتیں تحلیلی شکل میں ایک ذرہ کی حرکت کی ہیں۔ یہ ریاضی

(۲۲۱)

کی زبان میں صرف حرکت کے دوسرے قانون کو بیان کرتی ہیں۔

۱۷۷۔ فرض کرو کہ کسی آن ذرہ کے محدود لا، ما، ع ہیں اور فرض کرو کہ

اس کی رفتار کے تین اجزائے ترکیبی ع، و، ط ہیں۔ جزو ترکیبی ع، محور لا پر

اُس رفتار کو تعبیر کرتا ہے جو محور لا پر متحرک نقطہ کے ظل کی ہے اور کسی آن

اس نقطہ کا فاصلہ مبداء سے صرف لا ہے۔ اس لیے رفتار کی تعریف سے

$$ع = \frac{\text{فر لا}}{\text{فرت}} \dots \dots \dots (۶۷)$$

$$و = \frac{\text{فر ما}}{\text{فرت}}$$

اسی طرح

$$ط = \frac{\text{فر ی}}{\text{فرت}}$$

وہ شرح جس سے رفتار کا جزو ترکیبی لا بڑھتا ہے $\frac{\text{فر ع}}{\text{فرت}}$ ہے لیکن

اس کو ع^۱ فرض کیا جا چکا ہے کیونکہ وہ اسراع کا جزو ترکیبی لا ہے۔ اس طرح

$$ع^۱ = \frac{فر۱}{فرت}$$

$$ع^۲ = \frac{فر۲}{فرت}$$

اسی طرح

$$ع^۳ = \frac{فر۳}{فرت}$$

ع^۱، ع^۲، ع^۳ کی جو قیمتیں اوپر حاصل ہوئی ہیں ان کو استعمال کرنے سے یہ مساواتیں ہو جاتی ہیں:

$$ع^۱ = \frac{فر۱}{فرت}$$

$$ع^۲ = \frac{فر۲}{فرت}$$

$$ع^۳ = \frac{فر۳}{فرت}$$

(۲۲۲) حرکت کی مساواتوں (۶۶) میں اسراع کے اجزائے ترکیبی کے ان جملوں کو درج کرنے سے یہ مساواتیں حسب ذیل نئی شکل میں حاصل ہوتی ہیں:

$$\left. \begin{array}{l} لا = ک \frac{فر۱}{فرت} \\ ما = ک \frac{فر۲}{فرت} \\ می = ک \frac{فر۳}{فرت} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (۶۸)$$

۸۷۔ فرض کرو کہ ذروں کا ایک نظام سک، نقطہ لا، ما، می پر ک نقطہ لا، ما، می پر وغیرہ ہے اور فرض کرو کہ ان پر عمل کرنے والی قوت کے

اجزائے ترکیبی لا، ما، سے، لا، ما، سے، وغیرہ ہیں۔
اب مساواتوں (۶۸) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \text{ک} \frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فر}^2 \text{ک}}$$

$$\text{لا} = \text{ک} \frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فر}^2 \text{ک}} ، \text{ وغیرہ}$$

اس لئے جمع کرنے سے $\text{لا} = \text{ک} \frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فر}^2 \text{ک}}$ (۶۹)

جہاں ک نظام کے تمام ذروں پر عمل جمع کو تعبیر کرتا ہے۔
اس مساوات کی دائیں جانب کا رکن $\text{ک} \frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فر}^2 \text{ک}}$ ، ولا کی سمت
میں ان تمام قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ ہے جو نظام کے تمام
ذروں پر عمل کرتی ہیں۔ دفعہ ۵۰ کی بموجب ان قوتوں کو دو جماعتوں میں
تقسیم کیا جاسکتا ہے:

(۱) بیرونی قوتیں — وہ قوتیں جو ذروں پر نظام کے باہر سے
عمل کرتی ہیں۔

(ب) اندرونی قوتیں — وہ قوتیں جو نظام کے ذروں کے درمیان
ایک دوسرے پر عمل کرتی ہیں۔

حسب دفعہ ۵۰ یہ معلوم ہوتا ہے کہ قوتوں کی اس دوسری جماعت سے
 $\text{ک} \frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فر}^2 \text{ک}}$ میں کوئی اضافہ نہیں ہوتا کیونکہ یہ سب قوتیں جوڑوں میں وقوع پذیر ہوتی
ہیں اور ہر جوڑا عمل اور تعامل پر جس کے اجزائے ترکیبی مساوی اور مخالف
ہوتے ہیں مشتمل ہوتا ہے۔

پس $\text{ک} \frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فر}^2 \text{ک}}$ کو محسوب کرنے میں ہمیں صرف بیرونی قوتوں کو ملحوظ
رکھنا ہوگا۔

مساوات (۶۹) کی بائیں جانب کی رقم $\text{ک} \frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فر}^2 \text{ک}}$ کی شکل بھی

بدلی جاسکتی ہے۔ کیونکہ مساوات (۶۷) کی رو سے $\frac{فرء}{فرت} = ۶$ اور اس لیے

$\frac{فرء}{فرت}$ کی قیمت $\frac{فرء}{فرت}$ ہے، اس لیے

$$(۷۰) \quad \frac{فرء}{فرت} = \frac{فرء}{فرت} = \frac{فرء}{فرت} \quad (۷۰)$$

کسی ذرہ کے معیار حرکت سے مراد اس کی کمیت اور رفتار کا حاصل ضرب ہے (دفعہ ۲۰) اس لیے ذرہ کا معیار حرکت ایک سمتی ہے جس کے اجزائے ترکیبی ک، و، ک، ط ہیں اور ک، و کو معیار حرکت کا جزو ترکیبی لا کہا جاسکتا ہے۔ نظام کا ہر ذرہ معیار حرکت رکھتا ہے اور اس کے اجزائے ترکیبی لا، (۷۱) ہوں گے اور یہ وہ مقدار ہے جو مساوات (۷۰) کی بائیں جانب واقع ہے اب ہم مساوات (۶۹) کی جگہ حسب ذیل مساوات رکھ سکتے ہیں:

$$(۷۱) \quad \frac{فرء}{فرت} = ۴ \quad (۷۱)$$

جہاں $\frac{فرء}{فرت}$ سے بیرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی لا کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے اور ک، و، ک، ط معیار حرکت کے اجزائے ترکیبی لا کا مجموعہ ہے۔

خطی معیار حرکت کا بقا

۱۷۹۔ جب کوئی بیرونی قوتیں موجود نہ ہوں تو $\frac{فرء}{فرت} = ۴$ ۔ اور اس لیے

$$(۷۲) \quad \frac{فرء}{فرت} = ۴ \quad (۷۲)$$

$$(۷۳) \quad \frac{فرء}{فرت} = ۴ \quad (۷۳) \quad \text{اسی طرح}$$

$$(۷۴) \quad \frac{فرء}{فرت} = ۴ \quad (۷۴)$$

ان مساواتوں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مقداریں

$$\text{ح ک ع، ح ک و، ح ک ط}$$

وقت کے ساتھ متغیر نہیں ہوتیں۔ یعنی کل معیار حرکت کے اجزائے ترکیبی مستقل رہتے ہیں اور اس لیے کل معیار حرکت جسے ایک سمجھتی تصور کیا گیا ہے مستقل ہے۔ اس کو معیار حرکت کے بقا کا اصول کہتے ہیں۔ اسے الفاظ میں یوں بیان کیا جاسکتا ہے:

جب ذروں کا کوئی نظام حرکت کرتا ہے درآئیں حالیکہ اس پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہیں کرتیں تو نظام کا کل معیار حرکت مقدار اور سمت میں مستقل رہتا ہے۔

نظام کے مرکز ثقل کی حرکت

۱۸۰۔ اب ہم عام مساواتوں (۷۱)

$$\text{ح ک و} = \frac{\text{فرت}}{\text{ح ک ع}} \text{ وغیرہ (۷۵)}$$

کی طرف رجوع کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ نظام کے ذروں کے مرکز ثقل کے محدود کسی آن لآ، مآ، ہی ہیں اور فرض کرو کہ اس نقطہ کی رفتار کے اجزائے ترکیبی ع، و، ط سے تعبیر ہوتے ہیں۔

$$\text{ع} = \frac{\text{فرت لآ}}{\text{فرت}} \text{، وغیرہ}$$

لآ کی قسمت بموجب مساوات (۸) حسب ذیل ہے:

$$\text{لآ} = \frac{\text{ح ک و}}{\text{ح ک ع}}$$

$$\bar{e} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{ک لا}}{\text{ک}} \right)$$

$$\frac{\text{ک لا}}{\text{ک}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{ک}}{\text{ک}}$$

پس اگر تمام ذروں کی کل کمیت $\text{ک} = \text{ک}$ تو
 $\text{ک} = \text{ک} = \text{ک}$

(۲۲۵)

اب مساوات (۷۵) ہو جاتی ہے

$$\text{ک} = \text{ک} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فرت}} \dots \dots \dots (۷۷)$$

اسی طرح مساواتیں

$$\text{ک} = \text{ک} = \frac{\text{فر و}}{\text{فرت}} \dots \dots \dots (۷۸)$$

$$\text{ک} = \text{ک} = \frac{\text{فر ط}}{\text{فرت}} \dots \dots \dots (۷۹)$$

حاصل ہوتی ہیں۔

چونکہ

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فرت}}, \frac{\text{فر و}}{\text{فرت}}, \frac{\text{فر ط}}{\text{فرت}}$$

مرکز ثقل کے اسراع کے اجزائے ترکیبی ہیں اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ مرکز ثقل کی حرکت وہی ہے جو ہوتی اگر اس کی بجائے کمیت ک کا ایک ذرہ رکھا جاتا اور اس پر وہ قوت عمل کرتی جس کے اجزائے ترکیبی ک ، ک ، ک ہیں۔ نیز یہ قوت صرف وہ قوت ہے جو تمام بیرونی قوتوں کا حاصل ہے جبکہ ان قوتوں کو اس خیالی ذرہ پر عمل کرتا ہوا سمجھا جائے جس کے متعلق ہم نے فرض کیا ہے کہ وہ مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔

۱۸۱۔ اس مخصوص صورت میں جس میں کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں مرکز ثقل حرکت کرتا ہے گویا کہ وہ ایک ایسا ذرہ ہے جس پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہیں کرتیں، اس لیے اس کی حرکت ایک خط مستقیم میں یکساں رفتار کی حرکت ہوگی۔

۱۸۲۔ مرکز ثقل کی حرکت اس مخصوص صورت میں اور اس عام تر صورت میں جس میں بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں حسب ذیل دو قوانین کے تحت فرض کیا جاسکتی ہے:

قانون (۱)۔ ذروں کے ہر نظام کا مرکز ثقل سکون کی حالت میں رہتا ہے یا ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کی حالت میں الا آنکہ اس نظام پر بیرونی قوتوں کا عمل اس حالت کو بدلنے پر مجبور کرے۔

قانون (۲)۔ جب ذروں کے کسی نظام پر بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں تو مرکز ثقل کی حرکت وہی ہوتی ہے جو ہوتی اگر ذروں کی تمام کمیتیں ایک واحد ذرہ میں مرکز ہوتیں اور یہ ذرہ مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرتا اور اس پر تمام بیرونی قوتیں لگائی جاتیں۔

ان قوانین کو نیوٹن کے قوانین (۱) اور (۲) کی توسیعات خیال کیا جاسکتا ہے جبکہ انہیں ذروں کے ایک نظام کی حرکت پر عائد کیا جائے۔ (۳۲۶) اب ہم اس امر کی توجیہ کر سکتے ہیں کہ کیوں نیوٹن کے دوسرے قانون کو محدود جتنے کے اجسام کی حرکت پر عائد کرنا اکثر جائز ہے گویا کہ یہ اجسام ذرے ہیں (مقابلہ کرو دفعہ ۲۶ کے ساتھ)۔

معیار حرکت کے بقا کا اصول کسی حرکیاتی مسئلہ کے حل کرنے میں

جس میں صرف دو اجسام حرکت میں ہوں اکثر کافی ثابت ہوتا ہے۔

توضیحی مثال

کمیت ک کا ایک گولہ کمیت ک کی توپ سے سر کیا گیا ہے اور توپ افقی پٹریوں کے ایک زوج پر پیچھے حرکت کرتے ہیں آزاد ہے۔ توپ کے پیچھے ہٹنے کی رفتار معلوم کرو اور اس کے ہٹنے کا اثر گولے کی حرکت پر دریافت کرو۔

فرض کرو کہ توپ کو سر کرنے سے پیشتر وہ ایسے محل میں قائم ہے جو افق سے زاویہ θ بناتی ہے اور فرض کرو کہ گولے کی ابتدائی رفتار یعنی وہ رفتار جو توپ کے لحاظ سے اس کے دہانے سے خارج ہوتے وقت ہوتی ہے وہی گولے کی کمیت ک ہے۔ فرض کرو کہ زمین کے لحاظ سے گولے کی رفتار کے اجزاء ترکیبی افقی اور انتصابی u اور v ہیں اور فرض کرو کہ توپ کی پیچھے کی رفتار e ہے جس کو افقی سمت میں اس سمت کے خلاف پیمائش کیا گیا ہے جس کی جانب توپ قائم کی گئی ہے۔ وہ نظام جو توپ، بار و و اور گولے پر مشتمل ہے بیرونی قوتوں کے عمل سے آزاد نہیں ہے لیکن یہ قوتیں ”یعنی نظام کا وزن اور زمین کے ساتھ اس کا تعامل“ کوئی افقی جزو ترکیبی نہیں رکھتیں۔ اس لیے نظام کا افقی معیار حرکت دھماکے سے غیر متبدل رہنا چاہئے۔ یہ افقی معیار حرکت ابتداً صفر تھا اور اس لیے وہ صفر ہے جبکہ گولہ توپ سے نکلتا ہے۔ پس بار و و کے وزن کو نظر انداز کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$k - e - k = 0 \dots \dots \dots (1)$$

توپ کے لحاظ سے گولے کی جو رفتار ہے اس کے اجزاء ترکیبی

$$e + e' + u$$

ہیں۔ لیکن یہ رفتار رفتار و ہونی چاہئے جو افق سے زاویہ θ بناتی ہے اسلئے

(ب) $6 + 6 = 12$ وجم ع

(ج) $9 = 9$ و جب ع

مساوات (د) اور مساوات (ب) سے ہم معلوم کرتے ہیں

$$\frac{6}{6+6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

پس پیچھے ہٹنے کی رفتار ہے

$$\frac{6}{6+6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

گوئے کی اصلی رفتار کے اجزاء کی ترکیبی ہیں

(۲۲۷)

$$\frac{6}{6+6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

و = و جب ع

اس طرح گوئے کی اصلی رفتار

$$\frac{6}{6+6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ہے اور زاویہ ارتفاع طہ مساوات

$$\frac{6}{6+6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک خالی ریلوے ڈبہ ۸ ٹن وزنی ساکن ہے، ایک دوسرا مشابہ ڈبہ جس پر ۲۴ ٹن کا بوجھ ہے اور جو ایک میل فی گھنٹہ کی شرح سے حرکت کر رہا ہے اول الذکر ڈبے سے ٹکراتا ہے اور یہ دونوں ڈبے باہم حرکت کرتے ہیں۔ ان کی مشترک رفتار معلوم کرو۔

۲۔ کمیت گ کی ایک توپ، کمیت ک کا ایک گولہ افتقاً فائر کرتی ہے۔

ثابت کرو کہ بارود سے بنتا کام انجام پاتا ہے اس کی ایک سرچس توپ کو پیچھے

دیکھ دینے میں ضائع ہوتی ہے۔

۳۔ کمیت ک کا ایک ذرہ، زاویہ α کے ایک چکنے ماٹل مستوی پر نیچے پھسلتا ہے اور خود مستوی (جس کی کمیت گ ہے) ایک چکنے مینر پر پھسلنے میں آزاد ہے۔ ذرہ اور مستوی کا اسراع معلوم کرو۔

۴۔ ایک خول کا مشاہدہ کیا گیا کہ وہ اس وقت پھٹا جبکہ وہ اپنے راستے کے بلند ترین نقطہ پر تھا اور پھٹ کر وہ دو مساوی حصوں میں تقسیم ہوا جن میں سے ایک انتصا بانیچے گزرتا نظر آیا۔ ثابت کرو کہ دو سراحصہ ایک قطع مکانی مرسم کرے گا جس کا وتر خاص ابتدائی مکانی کے وتر خاص کا چار گنا ہو گا۔

۵۔ ایک گولی جس کا وزن ۱۰ اونس ہے ایک پرندے کو جس کا وزن ۵ پونڈ ہے لگتی ہے جبکہ وہ ہوا میں اڑ رہا تھا۔ گولی کی ضرب پڑتے وقت گولی کی افقی رفتار ۱۰۰ فٹ فی ثانیہ تھی اور پرند زمین سے اوپر ۶۴ فٹ بلندی پر اسی افقی سمت میں رفتار ۲۰ فٹ ثانیہ سے اڑ رہا تھا۔ ثابت کرو کہ پرند اس مقام سے جہاں اس پر مار پڑی تھی تقریباً ۵۲،۲ فٹ آگے گریگا۔

۶۔ ۵۰۰ ٹن کا ایک جہاز جو ۲۰ بحری میل فی گھنٹہ کی شرح سے جا رہا ہے اپنا ٹنک ایک وہیل مچلی سے ٹکراتا ہے جس کا وزن ۱۲ ٹن ہے اور جو پانی کی سطح پر سو رہی ہے۔ جہاز کی چال کتنی گھٹیکی؟ (پانی کی رفتار کو نظر انداز کرو)۔

۷۔ ایک پارل کو جس کا وزن ۲ ہنڈرویت ہے ایک ریل سے جو ۶۰ میل فی گھنٹہ کی شرح سے جا رہی ہے پھینکا گیا ہے پھینکتے وقت اس کی افقی رفتار ٹرین کے لحاظ سے ۱۱ فٹ فی ثانیہ ہے اور پٹریوں کے علی القوا اٹھ ہے۔ وہ ۳ ہنڈرویت وزنی دستی گاڑی پر گرتا ہے جو ایک ہموار چوڑے پر حرکت کرنے میں آزاد ہے اور اس کے پھینکے اس طرح ہیں کہ ان کی حرکت پٹریوں سے ۳۰ کا زاویہ بنائی گی کس رفتار سے گاڑی حرکت میں آئے گی؟

(۲۲۸)

۸۔ پونڈ کی ایک کمیت جو شمالاً ۱۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہی ہے ۶ پونڈ کی ایک کمیت سے جو شرقاً ۱۴ فٹ فی ثانیہ سے حرکت کر رہی ہے ٹکراتی ہے اور اس کی حرکت میں ۳۰ کا انصراف واقع ہوتا ہے اور اس کی رفتار بقدر ایک فٹ فی ثانیہ کے بڑھ جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ دوسری کمیت کی رفتار بقدر ۳۰ فٹ فی ثانیہ کے گھٹ جاتی ہے۔ اس کی حرکت کی نئی سمت معلوم کرو۔

۹۔ دو برف بھرے جن میں سے ہر ایک کی کمیت گ ہے کامل چکنے برف پر ساکن کھڑے ہیں اور ان کے پیندے ایک ہی سمت میں ہیں۔ ایک شخص کمیت ک ایک بھرے سے دوسرے پر کودتا ہے اور فوراً بعد ہی دوسرے سے پہلے پروا پس آتا ہے۔ ثابت کرو کہ بجروں کی انتہائی رفتاروں میں نسبت $k + k : k$ ہے۔

توانائی بالحرکت

۱۸۳۔ ذروں کے کسی نظام کی توانائی بالحرکت کے مطالعہ کی ابتداء بہترین طریقہ پر اس طرح کی جاسکتی ہے کہ سب سے اول اس مشکل کی طرف اپنی توجہ کو منعطف کیا جائے جو اس کتاب میں تاحال زیر بحث نہیں آئی ہے۔ اس مشکل کی وضاحت ایک مثال کے ذریعہ کی جائے گی۔

فرض کرو کہ ایک جہاز پانی میں ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے اور عرشہ پر سے ایک شخص کمیت ک کا ایک گولہ جہاز کے لحاظ سے ۳۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے آگے پھینکتا ہے۔ اگر یہ شخص فضا میں ساکن ہوتا تو ہم کہہ سکتے کہ اس نے اتنا کام انجام دیا ہے جو گولے کی آخری توانائی بالحرکت کے مساوی ہے اور اس لئے $\frac{1}{2}k(30)^2$ یا $450k$ ہے لیکن جہاز کے عرشہ پر گولے کی ابتدائی رفتار ۲۰ فٹ فی ثانیہ تھی اور شخص اس رفتار کو ۵۰ تک بڑھاتا ہے۔ اس لئے گولے کی توانائی بالحرکت میں تبدیلی

$$\frac{1}{2}k(50)^2 - \frac{1}{2}k(20)^2$$

یعنی ۱۰۵۰ اک ہے۔ اگر اس سے اس شخص کا کام تعبیر ہو تو ہمیں یہ فرض کرنا پڑتا ہے کہ جہاز کے عرشہ سے گولہ پھینکنا زمین پر اسے پھینکنے کی بہ نسبت

دگنے سے زیادہ سخت کام ہے۔ یہ صریحاً غلط ہے۔

۱۸۴۔ خطا اس میں واقع ہوئی ہے کہ پھینکنے والا شخص نہ صرف گولے کو

رفتار ایصال کرتا ہے بلکہ جہاز کو بھی۔ اگر وہ گولے کو آگے پھینکتا ہے تو اسکو

ساتھ ہی معیار حرکت کے بقا کے اصول کی رو سے جہاز کو پیچھے دار رفتار

ایصال کرنی چاہئے جس کا معیار حرکت گولے کے آگے دار معیار حرکت

کے مساوی اور مخالف ہوگا۔

کل کام جو انجام پایا اس تبدیلی کے مساوی ہے جو جہاز اور گولے کی (۲۲۹)

توانائی بالحرکت میں پیدا ہوئی۔

اب چونکہ حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے کوئی قوت تنہا عمل

نہیں کر سکتی اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ توانائی بالحرکت سے کام کو محسوب

کرنے کی ہر صورت میں ایک سے زیادہ اجسام کی توانائی بالحرکت پر

غور کرنا ہوگا۔ مثلاً ایک شخص جو زمین پر سے ایک گولے کو پھینکتا ہے

نہ صرف گولے کو آگے جنبش دیتا ہے بلکہ اس کے ساتھ ہی پوری زمین

کو بھی پیچھے وار دہکا مارتا ہے اور اس لئے دونوں کی توانائی کو شمار کرنا ہوگا

ورنہ غلط نتیجے برآمد ہوں گے۔

۱۸۵۔ ایک دوسری مشکل جو پہلی سے قریبی تعلق رکھتی ہے فوراً پیش

ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ ہم نے ایک گولے کو رفتار و سے جہاز کے

عرشہ کی سمت میں جو خود رفتار و سے حرکت کر رہا ہے پھینکا ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہمیں گولے کی توانائی کو $\frac{1}{2}k$ و فرض نہیں کرنا چاہئے

لیکن کیا اس کو $\frac{1}{2}k$ (و + و) فرض کرنا کچھ زیادہ مناسب ہے؟

ہرگز نہیں کیونکہ وہ سمندر جس میں جہاز چل رہا ہے زمین کی گردش کے

باعث رفتار و (فرض کرو) رکھتا ہے اور اس لئے توانائی کو اسی سبب

کی بنا پر

۱ ک (و + و + و)

لینا ہو گا اور علیٰ ہذا ہم اس سلسلہ کو لا انتہا بڑھا سکتے ہیں۔ کوئی ایسا حوالہ
کافریم معلوم نہونے سے جو کامل طور پر ساکن ہو تو انائی بالحرکت کی اصلی قیمت
معلوم کرنا ناممکن نظر آئے گا۔ مزید بریں یہ مشاہدہ طلب ہے کہ تو انائی بالحرکت
کے جملے جو مختلف حوالے کے فریموں کے حوالے سے حاصل ہوتے ہیں صرف
مستقلوں کا ہی فرق نہیں رکھتے۔ مثلاً ان دو جملوں کے درمیان فرق جو ہم نے
سمندر کے لحاظ سے تو انائی بالحرکت اور زمین کے مرکز کے لحاظ سے تو انائی
بالحرکت کے لیے معلوم کئے ہیں حسب ذیل ہے:

۱ ک (و + و + و) - ۱ ک (و + و)

= ۱ ک و + ک و (و + و)

یہ فرق نہ صرف ک اور و پر منحصر ہے بلکہ و اور و پر بھی۔ یہ فرق مستقل نہیں ہے
اور اس لیے معدوم نہیں ہوتا جب ہم تو انائی بالحرکت کا اضافہ محسوب
کرتے ہیں جو قوتوں کے عمل سے پیدا ہوا ہے۔

حسب ذیل مسئلوں سے ایک ایسے طریقے کا اظہار ہوتا ہے جس سے
یہ مشکلیں اور ان کی جیسی دوسری رفع ہو سکتی ہیں۔

۱۸۶۔ مسئلہ۔ متحرک ذروں کے کسی نظام کی تو انائی بالحرکت،

ذروں کے مرکز ثقل کے لحاظ سے حرکت کی تو انائی بالحرکت اور اس

واحد ذرہ کی تو انائی بالحرکت کے مجموعے کے مساوی ہوتی ہے جس کی

کمیت نظام کی کل کمیت کے مساوی ہو اور جو مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرے۔

فرض کرو کہ نقطہ لا، مار، ی، پر ذرہ ک ہے اور علیٰ ہذا۔ فرض کرو کہ
محدودوں کی پیمائش اس طرح عمل میں آئی ہے کہ مرکز ثقل کو مبدا لیا گیا ہے۔
فرض کرو کہ رفتاریں ع، م، ط، وغیرہ سے تغیر ہوتی ہیں اور فرض کرو کہ ان کی

پیمائش ایک فریم کے لحاظ سے کی گئی ہے جو مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرتا ہے
اس لئے

$$\frac{فر لاء}{فر ت} = \frac{1}{\epsilon} \text{، وغیرہ}$$

فرض کرو کہ مرکز ثقل کی رفتار کسی حوالے کے فریم کے حوالے سے جو خود متحرک ہے یا ساکن ہے (صرف اس شرط کے ساتھ کہ محوروں کی سمتیں گردش نہیں کرتیں) اجزائے ترکیبی ع، و، ط رکھتی ہے۔ اب ذرہ ک کی رفتار دو رفتاروں کا مرکب ہے، ایک ذرہ کی وہ رفتار ہے جو نظام کے مرکز ثقل کے لحاظ سے ہے اور جس کے اجزائے ترکیبی ع، و، ط ہیں اور دوسری مرکز ثقل کی رفتار ہے جس کے اجزائے ترکیبی ع، و، ط ہیں۔ اس لیے ذرہ ک کی کل رفتار کے اجزائے ترکیبی حسب ذیل ہیں:

$$\epsilon + \epsilon', \quad \omega + \omega', \quad \tau + \tau'$$

پس پہلے ذرہ کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2} k [(\epsilon + \epsilon')^2 + (\omega + \omega')^2 + (\tau + \tau')^2]$$

ہے اور اس لیے نظام کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2} \sum k [(\epsilon + \epsilon')^2 + (\omega + \omega')^2 + (\tau + \tau')^2]$$

ہے یا مربعوں کو پھیلانے سے

$$\frac{1}{2} (\sum k) (\epsilon^2 + \omega^2 + \tau^2)$$

$$+ \epsilon \sum k \omega + \omega \sum k \tau + \tau \sum k \epsilon$$

$$+ \frac{1}{2} \sum k (\epsilon'^2 + \omega'^2 + \tau'^2) \quad (۸۰)$$

چونکہ مرکز ثقل کو مبداء کے طور پر لیا گیا ہے اور ذروں کے محدود

لا، ما، ی، وغیرہ ہیں اس لیے مساوات (۸) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{حک لا}}{\text{حک}} = 0 \text{، وغیرہ}$$

(۲۳۱)

اور اس لئے حک لا = ۰۔ پس حک $\frac{\text{فر لا}}{\text{قوت}} = ۰$ یا حک ک ع = ۰۔ اسی طرح

حک و = ۰۔ اور حک ط = ۰۔ اس طرح جملہ (۸۰) کی دوسری سطر پوری کی پوری معدوم ہوتی ہے اور توانائی بالحرکت کے لئے جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{4}(\text{حک}) (\text{ع} + \text{و} + \text{ط}) + \frac{1}{4} \text{حک} (\text{ع} + \text{و} + \text{ط})$$

(۸۱).....

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

۱۸۷۔ اس کے بعد فرض کرو کہ مرکز ثقل کے محدود ثابت محوروں کے ایک خیالی جٹ کے حوالے سے کسی آن لا، ما، ی ہیں اور مرکز ثقل کی رفتار کے اجزائے ترکیبی حسب سابق ع، و، ط ہیں۔

ہم فرض کر چکے ہیں کہ مرکز ثقل کے لحاظ سے ذرہ ک، کے محدود لا، ما، ی ہیں اور رفتار کے اجزائے ترکیبی ع، و، ط ہیں۔ اس لیے خیالی ثابت محوروں کے حوالے سے ذرہ ک، کے محدود

لا + لا، ما + ما، ی + ی
ہوں گے اور اس کی رفتار کے اجزائے ترکیبی حسب سابق
ع + ع، و + و، ط + ط

ہوں گے۔

فرض کرو کہ ذرہ ک، پر عمل کرنے والی قوت کے اجزائے ترکیبی لا، ما، ی ہیں۔ دفعات کی بموجب اس ذرہ پر بیرونی قوتیں جو کام کرتی ہیں وہ اس منفعی کام کے مساوی ہے جو ذرہ ان قوتوں کے خلاف انجام دیتا ہے۔ پس جب ذرہ اپنے راستے کے کسی چھوٹے عنصر کو طے کرتا ہے تو اس پر جو کام انجام پاتا ہے

وہ حسب دفعۃ ۱۱۸

لا، فر (لا + لا) + ما، فر (ما + ما) + ے، فر (ی + ی)
کے مساوی ہے۔ اس لئے کسی چھوٹے ہٹاؤ میں وہ کام جو تمام ذروں پر
ہوتا ہے

ح [لا، فر (لا + لا) + ما، فر (ما + ما) + ے، فر (ی + ی)]

ہے اور اس کو حسب ذیل طریقے پر دو حصوں میں جدا کیا جاسکتا ہے:

پہلے حصہ کو

(۸۲) ح لا، فر لا + ح ما، فر ما + ح ے، فر ی

لے سکتے ہیں اور دوسرا حصہ حسب ذیل ہے

(۸۳) ح لا، فر لا + ح ما، فر ما + ح ے، فر ی

مساوات (۷۷) سے حاصل ہوتا ہے

ح لا = ک فر

جہاں ک نظام کی کل کمیت ہے اور یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ اس کا مرکز ثقل
حرکت کرتا ہے گویا کہ وہ کمیت ک کا ایک ذرہ ہے جس پر ایک قوت
عمل کرتی ہے جس کے اجزائے ترکیبی ح لا، ح ما، ح ے ہیں۔
یہ فوراً واضح ہوتا ہے کہ جملہ (۸۲) اس کام کو تعبیر کرتا ہے جو اس خیالی ذرہ
کی حرکت میں انجام پاتا ہے اور ہم جانتے ہیں کہ یہ کام اس کی توانائی بالحرکت
کے اضافے کے مساوی ہوتا چاہئے۔

کل کام جملوں (۸۲) اور (۸۳) کا مجموعہ ہے۔ یہ کل کام نظام کی
کل توانائی بالحرکت میں اضافے کے مساوی ہے (بموجب دفعۃ ۱۱۸) اور
نیز وہ پھر (بموجب دفعۃ ۱۱۸) ذروں کے مرکز ثقل کے لحاظ سے حرکت کی

توانائی بالحرکت اور کمیت ک کے خیالی ذرہ کی توانائی بالحرکت کے اضافے کے مجموعہ کے مساوی ہے جبکہ خیالی ذرہ کو مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرتا ہوا خیال کیا جائے۔

یہ آخری اضافہ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں جملہ (۸۲) سے تعبیر ہوتا ہے اور اس لیے قبل الذکر (۸۳) سے تعبیر ہونا چاہئے۔
اس طرح مرکز ثقل کے لحاظ سے توانائی بالحرکت میں اضافہ

ح (ک) فرلا + صا فرما + ہے فری (۱)

ہے اور اس لیے اس کام کے مساوی ہے جو قوتیں کرتی ہیں جبکہ اس کو اس طرح محسوب کیا گیا ہو گویا کہ مرکز ثقل ساکن ہے۔

۱۸۸۔ اس مسئلہ میں کہ توانائی بالقوہ کا اضافہ انجام پائے ہوئے کام کے مساوی ہے یہ جائز ہے کہ توانائی بالقوہ اور انجام پائے ہوئے کام دونوں کو صرف مرکز ثقل کے لحاظ سے حرکت پر غور کر کے محسوب کیا جائے یعنی نظام پر اس طریقہ سے بحث کی جاسکتی ہے گویا کہ مرکز ثقل ساکن ہے۔

مثلاً اس مسئلہ پر غور کرو جس میں ایک گولی کو متحرک جہاز پر سے فائر کیا گیا ہے۔ گولی کی کمیت جہاز کی کمیت کے مقابلہ میں خفیف ہونے کی وجہ سے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ گولی اور جہاز کے مرکز ثقل کی حرکت ٹھیک وہی ہے جو جہاز کی ہے۔ اس مرکز ثقل کے لحاظ سے گولی کی رفتار کو صرف وہ رفتار فرض کیا جاسکتا ہے جو بلحاظ عرشہ کے ہے۔ گولی کو نالی سے خارج کرنے میں بارود جو کام کرتی ہے وہ وہی ہے گویا کہ جہاز ساکن ہے اور اس لیے جہاز کے لحاظ سے گولی کی رفتار وہی ہوگی گویا کہ جہاز ساکن ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک گاڑی رفتار و کے ساتھ حرکت کر رہی ہے اور گاڑی پر سے ایک شخص ریت کو گاڑی کی پشت کی جانب ک پونڈ فی منٹ کی شرح سے اٹھا رہا ہے۔

اور ریت کی رفتار سڑک کے لحاظ سے وہ ہے۔ کس شرح سے آدمی کام کر رہا ہے؟
۲۔ ایک توپ گولے کو انتصاباً اوپر ارتفاع ف تک فائر کر سکتی ہے اسکو
ایک مسلح گاڑی پر جو رفتار و سے دوڑ رہی ہے رکھا گیا ہے۔ بڑے سے بڑا ٹپہ
معلوم کرو جہاں تک گولہ پہنچ سکتا ہے (۱) گاڑی کے پیچھے (ب) گاڑی کے
سامنے۔

۳۔ مثال ماسبق میں راستہ سے قریب ترین وہ نقطہ معلوم کرو جو توپ کی
زد سے باہر ہے۔

۴۔ کمیت گ کا ایک خول رفتار و کے ساتھ حرکت کر رہا ہے۔ اندرونی
دھماکے سے توانائی کی مقدار ن پیدا ہوتی ہے اور خول کو دو کمیتوں میں توڑ دیتی
ہے جن میں سے ایک کمیت دوسری کا ک گنا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ٹکڑے اسی
خط میں حرکت کرنا جاری رکھیں جس میں خول حرکت کر رہا تھا تو ان کی رفتاریں حسب
ذیل ہوں گی:

$$v_1 = \frac{v}{2} \quad v_2 = \frac{v}{2}$$

۵۔ دو آدمی جن میں سے ہر ایک کی کمیت گ ہے دو غیر لچکدار تختوں پر
کھڑے رہتے ہیں، ہر تختہ کی کمیت گ ہے اور وہ ایک چکنی چرخہ پر سے لٹک
رہے ہیں۔ ان میں سے ایک آدمی زمین سے کو دکر اپنے مرکز ثقل کو ارتفاع ف
تک اونچا لیجا سکتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر وہ تختہ سے اسی توانائی کے ساتھ

اچکے تو اس کا مرکز ثقل ارتفاع ف (۱) $\frac{g}{2}$ تک بلند ہوگا۔

دھکے والی قوتیں

۱۸۹۔ حرکیاتی مسائل میں بہت سی ایسی صورتیں پیش ہوتی ہیں جن میں
قوت کا عمل وقت کے استقدر خفیف وقفہ میں شروع اور ختم ہوتا ہے
کہ اس عمل کو فوری یا آنی سمجھا جاسکتا ہے ایسی قوتوں کو دھکے والی قوتیں

کہتے ہیں۔ دھکے والی قوتوں کی مثالیں وہ قوتیں لیجا سکتی ہیں جو نامتناہی پذیر تانگے کو جھٹکا دینے میں یا دو سخت اجسام کے درمیان ٹکرا ہونے میں بہ عمل آتی ہیں۔

دھکے والی قوت کے عمل سے معیار حرکت میں جو تبدیلی پیدا ہوتی ہے اس کی مقدار بالعموم محدود ہوتی ہے۔ چونکہ قوت صرف ایک صغیر وقت میں عمل کرتی ہے اس لیے معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح انتہائی بڑی ہونی چاہئے۔ حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح اس قوت کے مساوی ہے جو عمل کرتی ہے اور اس لیے خود قوت کو جب تک کہ وہ عمل کرتی رہتی ہے لا انتہائی بڑی ہونا چاہئے۔ اس لیے دھکے والی قوت کو ایک لا متناہی قوت سمجھا جاسکتا ہے جو صغیر وقت کے لیے عمل کرتی ہے۔

۱۹۰۔ دھکے والی قوتوں کے مطالعہ کی ابتداء ہی میں ان قوتوں کی ایک طبعی خصوصیت کا مشاہدہ کرنا مناسب ہوگا۔ کامل طور پر استوار جسم کی تعریف یہ کی گئی تھی کہ وہ ایسا جسم ہے جو کسی قوتوں کے زیر عمل خواہ وہ کتنی ہی بڑی ہوں اپنی شکل قائم رکھتا ہے۔ اس کے ساتھ ہی یہ بھی ظاہر کر دیا گیا تھا کہ کوئی کامل طور پر استوار جسم کائنات میں موجود نہیں ہے۔ پس بہت بڑی یا لا متناہی قوتوں مثلاً دھکے والی قوتوں کے زیر عمل کسی جسم کو کامل استوار نہیں سمجھا جاسکتا۔

اس کا نتیجہ یہ ہے کہ جب کوئی دھکے والی قوتیں عمل میں آتی ہیں تو مختلف چھوٹے ذروں کے درمیان جن سے مسلسل اجسام ترکیب یافتہ ہوتے ہیں اضافی حرکت شروع ہوتی ہے۔ یہ اضافی حرکت اس قسم کی توانائی رکھتی ہے جو حیلی اعمال کے ذریعہ نظام سے واپس وصول نہیں کیجا سکتی۔ فی الحقیقت ان ذروں کی اضافی حرکت صرف جسم کی حرارت کو تعبیر کرتی ہے چونکہ یہ توانائی نظام سے حیلی کام کے طور پر واپس وصول نہیں کی جاسکتی اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ دھکے والی قوتوں کو جو یہ توانائی پیدا کرنے کا

کام انجام دیتی ہیں بقائی قوتیں نہیں خیال کیا جاسکتا۔ اس طرح ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ کسی نظام کی توانائی بالقوہ اور توانائی بالحکمت کا مجموعہ دھکے والی قوتوں کے عمل میں مستقل نہیں رہتا۔ کیونکہ صریحاً دھکوں کے بعد توانائی کا ایک حصہ حرارت کی شکل میں رہ جاتا ہے۔

مثلاً سیسے کی ایک گولی پر غور کرو جو ایک فولادی نشانے پر ضرب لگاتی ہے۔ فرض کرو کہ نشانے پر ضرب پڑنے سے پیشتر گولی ارتفاع ف پر افقی رفتار سے حرکت کر رہی تھی۔ اس کی توانائی بالحکمت $\frac{1}{2}mv^2$ ہے اور اس کی توانائی بالقوہ mgh ہے۔ ضرب کے بعد ہم فرض کر سکتے ہیں کہ گولی افقی رفتار نہیں رکھتی اور نشانے کے انتصاباً نیچے گر جاتی ہے۔ جس آن گولی گرنے لگتی ہے اس وقت توانائی بالحکمت صفر ہے لیکن توانائی بالقوہ mgh ہے جیسا کہ ضرب سے پیشتر تھی۔ اس طرح کل توانائی میں سے توانائی $\frac{1}{2}mv^2$ غائب ہو چکی ہے۔ یہ توانائی گولی اور نشانے کے ذروں میں باہم گر حرکیں پیدا کرنے میں استعمال ہوئی ہے، اور انکا اظہار حرارت کی شکل میں اور نیز غالباً اجسام کی شکلوں کی مستقل تبدیلیوں میں۔ نشانے میں گرٹا یا گولی کا چپٹا ہو جانا ہوتا ہے۔

دھکے کی پیمائش

۱۹۱۔ دھکے والی قوت 'معیار حرکت میں جو تبدیلی پیدا کرتی ہے اس کو قوت کا دھکہ کہتے ہیں۔ اس طرح اگر دھکہ D کمیت K پر عمل کرے اور اس کی رفتار کو (یاد دھکے کی سمت میں رفتار کے جزو ترکیبی کو) E سے W میں بدل دے تو

$$D = K(W - E) \quad (۸۴)$$

حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے کسی لمحہ پر عمل کرنے والی قوت

اُس ذرہ کے معیار حرکت میں تبدیلی کی شرح کے مساوی ہوتی ہے جس پر وہ عمل کرتی ہے۔ اگر قوت کی مقدار مستقل ہے تو معیار حرکت کی کل تبدیلی قوت اور اُس وقت کے حاصل ضرب کے مساوی ہے جس میں وہ عمل کرتی رہتی ہے۔ لیکن اگر قوت کی مقدار متغیر ہے تو معیار حرکت کی تبدیلی قوت کے تکملہ کے مساوی ہوگی جو بلحاظ وقت کے جس میں قوت عمل کرتی رہتی ہے لیا گیا ہو۔ پس اگر کل وقت t کے کسی لمحہ پر قوت کی قیمت F ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ دھکے

$$= F t, \text{ اگر قوت کی مقدار مستقل ہو}$$

لیکن $= \int F dt$ ، اگر قوت کی مقدار متغیر ہو۔

دھکے کا کام

۱۹۲ — کمیت k کی رفتار کو e سے d میں تبدیل کرنے میں دھکے d سے جو کام انجام پاتا ہے وہ

$$\frac{1}{2} k v^2 - \frac{1}{2} k u^2$$

کے مساوی ہے یعنی کمیت کی توانائی بالحرکت میں جو اضافہ ہوا ہے اُس کے مساوی ہے۔ اب چونکہ

$$d = k (v - u)$$

اس لئے اس کام کے حملے کو شکل

$$\frac{1}{2} k (v - u) (v + u)$$

$$= d \left(\frac{v + u}{2} \right)$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔
اس لئے دھکے کا کام 'زیر عمل کمیت کی ابتدائی اور آخری

(۲۳۶)

رفتاروں کے اوسط اور دھکے کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے
اگر کمیت دھکے کے خط عمل کی سمت میں حرکت نہیں کر رہی ہے تو
مذکورہ بالا نتیجہ صریحاً درست ہوگا اگر ع، و کو دھکے کے خط عمل کی سمت میں
رفتاروں کے اجزائے ترکیبی سمجھا جائے۔

توضیحی امثلہ

۱۔ ۱۴ پونڈ کا ایک گولہ ۲۰۰ پونڈ کمیت کے ایک نشانہ پر جو زنجیروں
کے ذریعہ لٹکا ہوا ہے، فائر کیا گیا ہے، نشانہ حرکت کی ابتدا اتفاقاً
کرنے میں آزاد ہے۔ اگر گولہ ٹکرانے سے پیشتر ۱۰۰۰ فٹ فی ثانیہ کی
افقی رفتار سے حرکت کر رہا تھا اور ٹکرانے کے بعد نشانے میں دھنسا ہوا
رہ جائے تو ٹکر کی وجہ سے توانائی کا نقصان معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ٹکر کے بعد نشانہ اور گولہ باہم و فٹ فی ثانیہ کی افقی رفتار سے
حرکت کی ابتدا کرتے ہیں۔ لہذا معیار حرکت کے بقا کے اصول سے ٹکر سے پیشتر
کے معیار حرکت کو ٹکر کے بعد کے معیار حرکت کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$14 \times 1000 = 214 \times v$$

$$\frac{14000}{214} = v$$

ٹکر سے قبل توانائی بالحرکت $\frac{1}{2} \times 14 \times (1000)^2$ تھی اور بعد
کے $\frac{1}{2} \times 214 \times v^2$ ۔ اس لئے توانائی کا نقصان ہے

$$\frac{1}{2} (14000000 - 214 v^2) = 6540000 \text{ فٹ پونڈ} \text{ تقریباً}$$

۲۔ ایک بھاری زنجیر جس کا طول L ہے اور فی اکائی طول کمیت

ک ہے ایک مینر کے کنارے پر اس طرح پکڑی گئی ہے کہ اس کا طول ط کنارے پر سے نیچے لٹک رہا ہے اور باقی حصہ مینر کے انتہائی کنارے پر گول لیٹا پڑا ہے۔ اگر زنجیر کو آزاد چھوڑ دیا جائے تو حرکت کی کسی منزل پر رفتار معلوم کرو۔

فرض کرو کہ حرکت کی کسی منزل پر زنجیر کا طول لا انتصافاً لٹک رہا ہے اور اس طرح طول ل۔ لا مینر پر گول لیٹا ہوا ہے۔ صغیر وقت فرت کے بعد فرض کرو کہ زنجیر کا جو حصہ لا لٹک رہا ہے وہ لا سے لا + فرلا میں بڑھ جاتا ہے۔ اس لیے اگر زنجیر کی نیچے وار رفتار و ہو تو صریحاً

$$و = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$$

وقفہ فرت کی ابتدا میں زنجیر کا نیچے وار معیار حرکت وہ تھا جو رفتار و سے حرکت کرنے والی کمیت ک لا کا ہے۔ اس لیے وہ ک ولا تھا۔ اس وقفہ کے ختم پر معیار حرکت وہ ہے جو کمیت ک (لا + فرلا) کا ہے جو اس رفتار سے حرکت کرتا ہے جس کو (و + فرو) سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ پس معیار حرکت میں اضافہ

ک (لا + فرلا) (و + فرو) - ک لا و
ہے یا دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار فرو فرلا کو نظر انداز کر دیا جائے تو یہ اضافہ
ک (لا فرو + و فرلا)

ہے۔

لیکن معیار حرکت کا اضافہ فی اکائی وقت مساوات (اے) کی رو سے عمل کرنے والی کل قوت کے مساوی ہوتا ہے اور یہ قوت وقفہ فرت کی ابتدا میں ک ج لا ہے اور ختم پر ک ج (لا + فرلا) اس لیے دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار فرلا فرت کو نظر انداز کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ وقفہ فرت میں معیار حرکت میں اضافہ ک ج لا فرت ہوتا چاہئے۔
اس لیے

ک (لا فرو + و فلا) = ک ج لا فرت

= ک ج لا $\frac{فلا}{و}$

یا
ولا $\frac{فرو}{فلا} + و^۲ = ج لا$

اس مساوات کو تکمل کرنے کے لیے ہم ۲ لا سے ضرب دیتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

و لا $\frac{۲}{۳} = ج لا^۳ + مستقل$

مستقل کا تعین کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ جب لا = ط تو و = ۰ اور اس لیے مستقل کی قیمت - $\frac{۲}{۳} ج ط^۳$ ہونی چاہئے۔ اس طرح

و = $\frac{۲}{۳} ج \frac{لا^۳ - ط^۳}{لا^۲}$

اس مساوات سے وہ رفتار معلوم ہوتی ہے جبکہ طول لا مینر پر سے انتصافاً لٹک رہا ہو۔ جب زنجیر کا آخری ذرہ کھینچ جاتا ہے تو لا کی قیمت ل ہے اور اس لیے اس لمحہ پر

و = $\frac{۲}{۳} ج \frac{ل^۳ - ط^۳}{ل^۲}$

ہم دیکھتے ہیں کہ و کی یہ قیمت وہ قیمت نہیں ہے جو توانائی کی مساوات سے حاصل ہوگی۔ صریحاً یہاں اس مساوات کو استعمال نہیں کرنا چاہئے کیونکہ دھکے پورے وقت میں عمل کرتے ہیں اور زنجیر کے نئے ذروں کو جھٹکے کے ساتھ حرکت میں لاتے ہیں۔

مثالیں

- ۱۔ ۱۰ ٹن وزن کا ایک خالی ریلوے ڈبہ ایک چھوٹے ڈبے سے جڑا ہے
- ۵۔ ٹن کوئلہ لدا ہے ٹکراتا ہے اور دونوں باہم ۵ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے

حرکت کرتے ہیں۔ پہلے ڈبہ کی رفتار ابتدا کیا تھی اور ڈبوں کے درمیان دھکے کی مقدار کیا ہے۔

۲۔ $\frac{1}{4}$ اونس وزن کا ایک پتھر ۵ فٹ ارتفاع سے نرم زمین پر چھوڑا گیا ہے۔ پتھر کے ساکن ہونے سے پیشتر عمل کرنے والے دھکے کی مقدار معلوم کرو۔
۳۔ ایک سٹن کی کمیت ۶۱ فٹ کے ارتفاع سے ایک انتصابی میخ پر گرتی ہے اور اس کو زمین میں نصف انچ زیادہ دھنسا دیتی ہے۔ یہ تسلیم کر کے کہ میخ پر کمیت کی قوت عالمہ اثنائے عمل میں مستقل رہتی ہے اس کی مقدار اور عمل کا وقفہ معلوم کرو۔

۴۔ ۱۰ گرام کمیت کا ایک جسم ۸ سینٹی میٹر فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے۔ دفعتاً اس پر ایک ضرب پڑتی ہے جس کی وجہ سے اس کی رفتار دوگنی ہو جاتی ہے اور اس کی حرکت کی سمت بقدر نصف زاویہ قائمہ کے تبدیل ہو جاتی ہے۔ ضرب کی سمت معلوم کرو اور وہ رفتار معلوم کرو جس سے جسم حرکت کرتا اگر وہ ضرب سے پیشتر ساکن ہوتا۔

۵۔ ایٹوڈ کی مشین کی دوری سے اس کے سروں پر کمیتیں کپکپ بندھی ہیں جن میں ک، زیادہ بھاری ہے۔ دوری کے ایک ثانیہ تک حرکت میں رہنے کے بعد کمیت ک، فرش سے ٹکراتی ہے۔ معلوم کرو (ا) کمیت ک، کتنی دیر تک چڑھنا جاری رکھے گی (ب) کمیت ک، پھر کس رفتار سے حرکت میں آئے گی جبکہ دوری تن جائے۔

(۲۳۸)

۶۔ کسی خاص دن ایک انچ بارش۔ اگھنٹوں میں ہوئی جبکہ قطرے ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے گرے۔ ایک ڈیرے کی چھت پر جو دبیز کپڑے سے بنا ہے اوسط دباؤ فی مربع فٹ معلوم کرو جو بارش کے قطروں کے تصادم سے پیدا ہوا تھا، یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ چھت افقی ہے۔ (پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن $\frac{1}{4}$ ۶۲ پونڈ ہے)۔

۷۔ زمین جو اپنے مدار میں رفتار سے حرکت کر رہی ہے چھوٹے شہابیوں کے ایک گروہ سے تصادم ہوتی ہے جس کی کثافت فی مکعب میل

ایک کیلو گرام ہے اور جو رفتار و سے ٹھیک اُس سمت کے خلاف حرکت کر رہے ہیں جو زمین کی حرکت کی ہے۔ شہابوں کے تصادم کی وجہ سے زمین کی رفتار میں تخفیف کی شرح معلوم کرو اور نیز زمین کی سطح پر کے مختلف نقطوں پر بارشیا کے ارتفاع میں اضافہ معلوم کرو یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ تمام شہاب زمین کی سطح پر پہنچنے سے قبل گرد میں تبدیل ہو جاتے ہیں۔ (زمین کی کمیت 6×10^{24} گرام ہے اور اس کا قطر ۷۹۲۷ میل ہے)

۸۔ ایک ایکساں زنجیر ایک افقی مستوی پر ڈھیر کی شکل میں گول لیٹی پڑی ہے اور ایک شخص اس کا ایک سرا ہاتھ میں لیکر اس کو رفتار و سے ایکساں طور پر اوپر اٹھاتا ہے۔ ثابت کرو کہ جب اُس کا ہاتھ مستوی سے ارتفاع لا پر ہوتا ہے تو اس کے ہاتھ پر دباؤ زنجیر کے لا + $\frac{W}{g}$ طول کے وزن کے مساوی ہے۔

لچک

۱۹۳۔ یہ عام تجربہ کی بات ہے کہ اگر ہم فولاد کے ایک گولے کو سخت فرش پر گرائیں تو وہ کچھ ارتفاع تک بازگشت کرے گا لیکن اگر لکڑی کے گولے کو گرائیں تو وہ اس سے بہت کم ارتفاع تک بازگشت کرے گا اور روٹی، کاغذ یا پکنی مٹی کا گولہ تو بازگشت ہی نہ کرے گا۔ جب دو جسموں کی سطحوں کے درمیان تماس ایسی نوعیت کا ہو کہ تصادم کے بعد وہ بالکل بازگشت ہی نہیں کرتے تو ہم کہتے ہیں کہ تماس کامل طور پر بے لچک ہے لیکن اگر جسم بازگشت کریں تو ہم کہتے ہیں کہ تماس لچکدار ہے۔ صریحاً لچک کے مختلف درجے ہوتے ہیں۔

بڑے سے بڑے پچاؤ کا لمحہ

۱۹۴۔ تصادم کی سب سے زیادہ معروف مثال جس میں لچک بہت بڑی ہوتی ہے غالباً بلیئرڈ کے دو گولوں کے تصادم سے ہم پہنچتی ہے۔ ہم

اس تصادم پر بہترین طریقے سے بحث کر سکیں گے اگر دوسرے گولے کی حرکت حوالہ ایک ایسے حوالے کے فریم سے دیا جائے جو پہلے گولے کے ساتھ حرکت کرے۔ تصادم سے قبل دوسرے گولے کا مرکز پہلے گولے کے مرکز کے قریب آ رہا ہے اور تصادم کے بعد اس سے پرے ہٹ رہا ہے۔ اس لیے اثنائے تصادم میں کسی لمحہ پر اس کی حرکت قریب آنے کی حرکت سے پرے ہٹنے کی حرکت میں تبدیل ہو جانی چاہئے، اس لمحہ پر گولوں کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ اقل تھا۔

(۲۳۹)

فرض کرو کہ تجربہ کرنے سے پیشتر ہم نے گولوں کے ان دورخوں پر سفیدی لگا دی ہے جن پر تصادم واقع ہوتا ہے۔ تصادم کے بعد گولوں کا امتحان کرنے سے معلوم ہو گا کہ سفیدی میں خلل پڑ گیا ہے نہ صرف ایک واحد نقطہ پر بلکہ ایک پورے دائرہ پر جو کافی بڑا ہے۔ اگر گولے اچھی رفتار سے حرکت کر رہے ہوں تو اس دائرہ کا قطر نصف انچ بھی ہو سکتا ہے۔ اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اس لمحہ پر جس پر گولوں کے مرکز ایک دوسرے سے قریب ترین تھے ان کا درمیانی فاصلہ اس فاصلہ سے کم تھا جو ان کے درمیان ہوتا اگر گولے سکون کی حالت میں ایک دوسرے کو مس کرتے ہوئے رکھے جاتے۔ یعنی اثنائے تصادم میں گولے پچک گئے تھے۔

وہ لمحہ جس پر مرکز قریب ترین ہوتے ہیں بڑے سے بڑے پچکاؤ کا لمحہ کہلاتا ہے۔

بالعموم جب کوئی دو سطحیں تصادم میں ہوتی ہیں تو وہ لمحہ جس پر مشترک عماد کی سمت میں اضافی رفتار معدوم ہوتی ہے بڑے سے بڑے پچکاؤ کا لمحہ کہلاتا ہے۔ صریحاً یہ وہ لمحہ ہے جس پر ان دو سطحوں کی حرکت قریب آنے کی حرکت سے پرے ہٹنے کی حرکت میں تبدیل ہوتی ہے۔

۱۶۵۔ بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ پر پہنچنے سے پہلے بالعموم دونوں اجسام کی رفتاریں تبدیل ہو چکتی ہیں اور اس لیے اس تبدیلی کے پیدا کرنے میں

قوتیں بہ عمل ہونی چاہئیں۔ ان قوتوں کے عمل کا پورا وقت (یعنی اس لمحہ سے جس پر اجسام ابتداً مس کرتے ہیں اس لمحہ تک جس پر بڑے سے بڑا پچکاؤ واقع ہوتا ہے) اس قدر کم ہوتا ہے کہ ان کو دھکے والی قوتیں سمجھا جاسکتا ہے۔ ان دو جسموں پر عمل کرنے والے دھکے، عمل اور تعامل ہونے کی وجہ سے مساوی اور مخالف ہونے چاہئیں۔ اگر سطحیں چکنی ہیں تو ان دھکوں کی سمت مشترک عماد کی سمت ہونی چاہئے۔ اگر سطحیں کھردری ہیں تو اہم سمت کی تخصیص نہیں کر سکتے جب تک کہ ایک دوسرے پر سطحوں کی جھلسل کی سمت معلوم نہ ہو۔ ہر صورت میں فرض کرو کہ مشترک عماد کی سمت میں دھکے کا جزو ترکیبی د سے تعبیر ہوتا ہے۔ مقدار د کو پچکاؤ کا دھکہ کہتے ہیں۔ صریحاً یہ مقدار ان قوتوں کو تعبیر کرتی ہے جن سے دھکہ ترکیب پاتا ہے اور جو اضافی عمادی رفتار کو صفر میں تحویل کرتی ہیں۔

(۲۴۰) بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ کے بعد قوتوں کا ایک دوسرا نظام بہ عمل آنا چاہئے تاکہ وہ رفتاریں پیدا ہوں جن سے اجسام ایک دوسرے سے جدا ہوتے ہیں۔ فی الحقیقت بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ پر اجسام کے پچکے ہوئے حصے کسی ہوائی کمانی کے مانند عمل کرتے ہیں اور ہم فرض کر سکتے ہیں کہ افتراق کی رفتاریں اس خیالی کمانی کے عمل سے پیدا ہوتی ہیں۔ یہ قوتیں بھی جو جسموں کو جدا کرتی ہیں دھکے والی قوتیں سمجھی جاسکتی ہیں اور مشترک عماد کی سمت میں اس دھکے کے جزو ترکیبی کو د سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ دھکے د کو عود کا دھکہ کہتے ہیں۔

۱۹۶۔ جب تصادم سے قبل اجسام کی حرکت معلوم ہوتی ہے تو ہم معیار حرکت کے بقا کا اصول استعمال کر کے بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ پر رفتاریں معلوم کر سکتے ہیں۔ اس لئے پچکاؤ کے دھکے د کو محسوب کرنا ممکن ہے۔

برخلاف اس کے دھکے د کی مقدار تصادم اجسام کے تماس کی عین منحصر ہوتی ہے، اگر اجسام کامل طور پر بے لچک ہیں تو تصادم کے بعد افتراق

نہیں ہوگا اور اس لیے $d = -$ ۔ تجربہ کی بناء پر بالعموم یہ معلوم ہوا ہے کہ
دھکے d اور دھکے d میں حسب ذیل سادہ ربط ہے :

$$d = c$$

جہاں c ایک مقدار ہے جو صرف دو متضاد سطحوں کے تماس کی نوعیت
پر منحصر ہے اور دھکے d کی مقدار پر منحصر نہیں ہے۔ مقدار c کو ان دو
اجسام کی لچک کی قدر کہتے ہیں۔

یہاں اس بات کو اچھی طرح سمجھ لینا ضروری ہے کہ لچک کی یہ قدر
وہ مقدار ہے جو ان ذروں یا لچک کے مستقلات سے بالکل مختلف ہے جو
لچکدار اجسام کے نظریہ میں واقع ہوتے ہیں۔ واقعہ یہ ہے کہ اصطلاح لچک کی قدر
جن معنوں میں مقدار c کو تعبیر کرنے کے لیے یہاں استعمال ہوئی ہے وہ نامناسب
ہے کیونکہ اس سے جس چیز کی پیمائش ہوتی ہے اس کو لچک کی بجائے بازگشتگی
کہنا زیادہ مناسب ہے اور بلاشبہ لچک کی قدر کی بجائے بازگشتگی کی قدر کہنا
زیادہ ٹھیک ہے۔ لیکن بالعموم اصطلاح لچک کی قدر استعمال کی جاتی ہے۔

۱۹۷۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ c کی قیمت کامل طور پر بے لچک اجسام
کے لیے صفر ہے۔ لوہا سیسے سے ٹکرائے تو c کی قیمت تقریباً ۱۴ ہے

لوہا لوہے سے ٹکرائے تو اس کی قیمت ۶۶ ہے اور سیسا سیسے سے ٹکرائے
تو ۲۰ ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ بازگشتگی دو اجسام کے درمیانی تماس کی نوعیت پر

منحصر ہوتی ہے اور اس لحاظ سے رگڑ کی قدر کے مشابہ ہے۔ بازگشتگی
کچھ ایک جسم سے اور کچھ دوسرے جسم سے پیدا نہیں ہوتی کیونکہ اگر ایسا

ہوتا تو c کی قیمت جبکہ لوہا سیسے سے ٹکرائے ان قیمتوں کے درمیان
ہوتی جو لوہا لوہے سے اور سیسا سیسے سے ٹکرانے میں حاصل ہوتی ہیں۔

ان اجسام کی مثالیں جن کے لیے لچک کی قدر بڑی ہے حسب ذیل
معلوم ہوئی ہیں، ہاتھی دانت کے دو گولے جب متضاد ہوتے ہیں تو

c کی قیمت تقریباً ۸۱ ہے اور شیشا شیشے سے متضاد ہوتا ہے تو c کی
قیمت ۶۴ ہے۔ سب سے زیادہ کامل لچک جو تصور کی جاسکتی ہے

اُن دو اجسام کی ہے جن کے لیے $ج = ۱$ ، اس صورت میں عود کا دھکے پچکاؤ کے دھکے کے مساوی ہوگا۔ ایسے اجسام کو کامل طور پر لچکدار کہا جاتا ہے۔ کامل طور پر لچکدار اجسام کی یہ خصوصیت ہے کہ تصادم سے کسی توانائی کا نقصان نہیں ہوتا۔ یہ ظاہر ہے کہ $ج$ کی قیمت اکائی سے تجاوز نہیں کر سکتی کیونکہ اگر اس کی قیمت اکائی سے متجاوز ہو تو عود کے دھکے سے جو توانائی بالحرکت ظہور پذیر ہوگی وہ اُس توانائی سے زیادہ ہوگی جو پچکاؤ کا دھکے جذب کرتا ہے اور اس لیے مجموعی توانائی بڑھ جائے گی جو ناممکن ہے۔

اب ہم ان اصولوں کو تصادم کی چند اہم صورتوں پر استعمال کریں گے۔

ذره جو ایک ثابت سطح سے ٹکرا

راست تصادم

۱۹۸۔ اول فرض کرو کہ تصادم راست ہے یعنی ٹکر کے لمحے پر ذرہ سطح کے اُس نقطہ کے عماد پر حرکت کر رہا ہے جس پر وہ آکر ٹکراتا ہے۔ فرض کرو کہ اس کی کمیت $ک$ ہے اور تصادم سے قبل اس کی رفتار $و$ ہے۔ بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحے پر ذرہ مستوی کے لحاظ سے ساکن ہوگا اور اس لیے اس کا معیار حرکت پچکاؤ کے دھکے کی وجہ سے $ک$ و سے صفر میں تحویل ہوگا۔ اس لیے

$$د = ک و$$

اگر لچک کی قدر $ج$ ہے تو

$$د = ج د = ج ک و$$

(۲۴۲) اس طرح مقدار $ج$ ک و کا ایک عمادی دھکے ظہور پذیر ہوگا اور اس کی وجہ سے ذرہ میں رفتار $ج$ و پیدا ہوگی۔ کوئی ماسی دھکے موجود نہیں ہے کیونکہ سطحیں ایک دوسرے پر نہیں پھسلتیں۔ پس رفتار یا زگشت سطح کے

عماد کی سمت میں چ و ہے۔

مائل تصادم۔ چکنا تاس

۱۹۹۔ اگر تصادم مائل ہے تو فرض کرو کہ تصادم سے قبل حماس مستوی اور عماد کی سمتوں میں رفتار کے اجزائے ترکیبی u و v ہیں۔ حسب سابق

$$u = k \quad v = d \quad \text{چ ک و}$$

اس لیے تصادم کے بعد عماد کی سمت میں رفتار (فرض کرو و)

$$u' = w \quad \text{چ و}$$

ہے۔

اگر حماس کو چکنا فرض کیا جائے تو حماس مستوی میں کوئی قوت نہیں ہو سکتی اور اس لیے حماس مستوی میں معیار حرکت غیر متغیر رہتا ہے۔ اس طرح حماس مستوی میں رفتار u کے مساوی رہتی ہے اور اس لیے تصادم کے بعد رفتار وہ ہوگی جس کے اجزائے ترکیبی u چ و ہیں۔ فرض کرو کہ طہ وہ زاویہ ہے جو رفتار تصادم سے پیشتر عماد کے ساتھ بناتی ہے اور فرض کرو کہ تصادم کے بعد متناظر زاویہ فہ ہے۔ تب

$$\text{مس طہ} = \frac{u}{w}$$

$$\text{مس فہ} = \frac{u}{v}$$

شکل (۱۲۶)

ایسے مس طہ = چ مس فہ

اگر اجسام کامل طور پر لچکدار ہیں تو چ = ۱ اور اس لیے طہ = فہ یعنی ذرہ ایسے زاویہ پر بازگشت کرتا ہے جو زاویہ وقوع کے مساوی ہے۔ اس کا انعکاس اسی قانون کے تحت ہوتا ہے جو نور کی کرن کا ہے۔ اگر اجسام کامل لچکدار نہیں ہیں تو طہ > فہ اور اس لیے بازگشت کا

راستہ عماد سے زیادہ ہٹا ہوا ہوگا۔

اگر اجسام کامل طور پر بے لچک ہیں تو $\text{چ} = ۰$ اور اس لیے $\text{فہ} = \frac{۲}{۴}$ ذرہ مستوی پر صرف پھسلے گا اور صریحا ایسا ہی ہونا چاہئے کیونکہ $\text{د} = ۰$ تصادم سے قبل توانائی بالحرکت

$$\frac{۱}{۲} k (e^2 + w^2)$$

ہے اور تصادم کے بعد

$$\frac{۱}{۲} k (e^2 + w^2)$$

ہے۔ اس لیے توانائی بالحرکت میں نقصان کی مقدار

$$\frac{۱}{۲} k (w^2 - w'^2)$$

$$\frac{۱}{۲} k w^2 (1 - \text{چ}^2)$$

ہے یعنی

یہ نقصان معدوم ہوگا اگر اجسام کامل طور پر لچکدار ہوں یعنی $\text{چ} = ۱$ ۔ باقی تمام صورتوں میں توانائی کا نقصان ضروری ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ چ اکائی سے بڑا نہیں ہو سکتا ورنہ اجسام کو ایک دوسرے سے ٹکرائے توانائی میں اضافہ کرنا ممکن ہوتا۔

ماثل تصادم۔ کھداتاس

۲۰۰۔ چکنے تاس کی صورت کی طرح ہمیں ربط $\text{د} = \text{چ} w$ حاصل ہوتا ہے جو عماد کی سمت میں رفتار کے اجزائے ترکیبی کو مربوط کرتا ہے۔ لیکن تعامل کلاً عماد کی سمت میں عمل نہیں کرتا اور اس لیے اب یہ کہنا درست نہیں ہے کہ رفتار کا تاسی جزو ترکیبی غیر متغیر رہتا ہے۔

فرض کرو کہ ہم اس صورت پر غور کرتے ہیں جس میں ذرہ کی سطح ثابت سطح پر اس پورے وقفہ میں جس میں یہ دو سطحیں ایک دوسرے کو مس کرتی ہیں ایک ہی سمت میں پھسلتی ہے۔ تب تصادم کے ہر لمحہ پر ایک ماسی قوت ہوگی جو عمادی قوت کے مہ گنا کے مساوی ہوگی اور اس لیے کل ماسی دھکے عمادی دھکے کے مہ گنا کے مساوی ہونا چاہئے اور اس لیے مہ $(\text{د} + \text{د})$ کے مساوی۔

اس لیے اگر تصادم کے بعد ماسی رفتار \vec{e} ہے تو

$$ک = (ع - ع) = م (د + د)$$

$$= م (ج + ج) د$$

$$= م (ج + ج) ک و$$

$$اس طرح \quad ع = ع - م (ج + ج) و$$

حسب سابق اگر ہم فرض کریں کہ ذرہ کا راستہ تصادم سے قبل اور اس کے بعد عماد کے ساتھ زاویے طہ 'فہ' بناتا ہے (دیکھو شکل ۱۲۶) تو

(۲۴۴)

$$مس ط = \frac{ع}{و}$$

$$مس ف = \frac{ع}{و} = \frac{ع - م (ج + ج) و}{ج و}$$

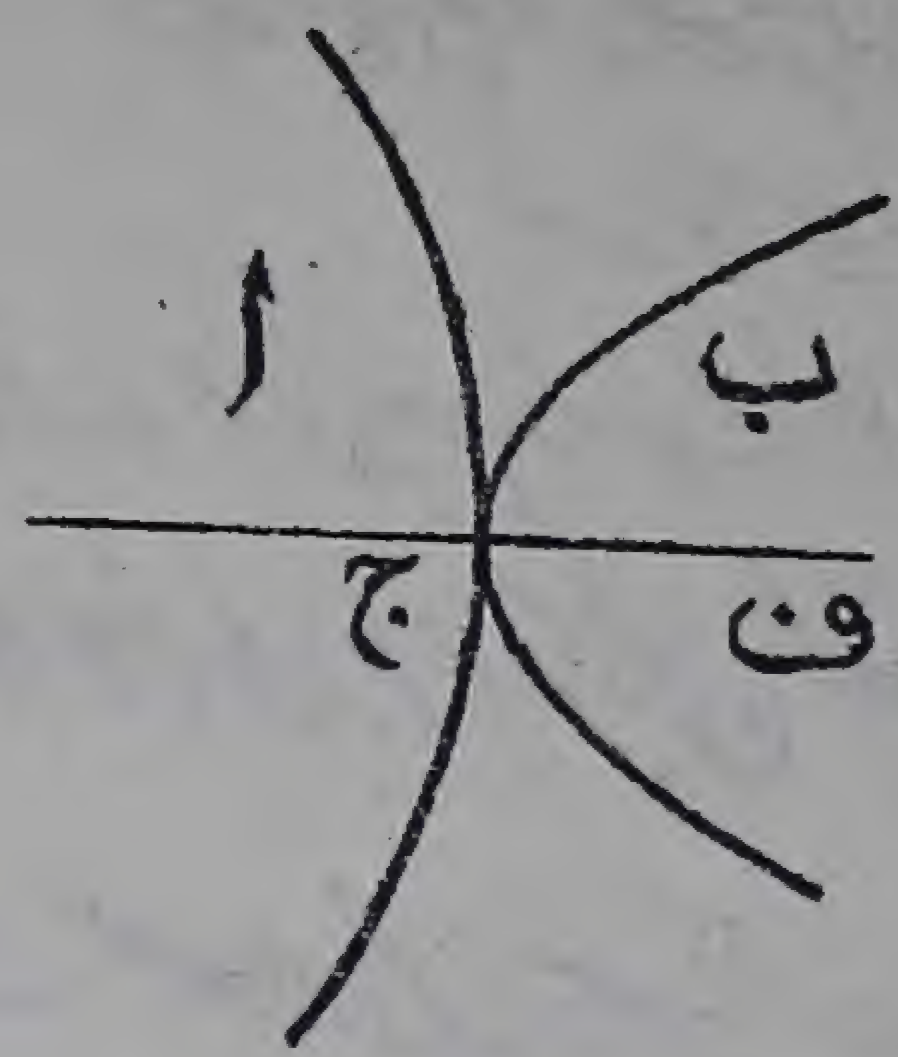
اس لیے $ج مس ف = مس ط - م (ج + ج) و$

(ج + ج) مہ کی قیمت ہمیشہ مثبت ہوگی اور اس لیے فہ ہمیشہ اس قیمت سے کم ہوگا جو مستوی کے چکنے ہونے کی صورت میں حاصل ہوتی ہے، دوسرے الفاظ میں مستوی کا کھردراپن ذرہ کو عماد سے قریب تر بازگشت کرانے کا موجب ہوتا ہے۔

لیکن یہ مساوات صرف بعض حدود کے اندر درست رہتی ہے کیونکہ ہم نے یہ مان لیا ہے کہ تصادم کے پورے وقفہ میں پھسلن واقع ہوتی ہے۔ یہ ہو سکتا ہے کہ حرکت کی کسی خاص منزل پر پھسلن موقوف ہو اور ذرہ لڑھکنا شروع کرے اور اگر ایسا ہو تو محصلہ بالا مساوات جائز نہیں ہوگی۔

دو متحرک اجسام کا تصادم

۲۰۱۔ فرض کرو کہ کیتوں ک، ک کے دو جسم 'ا' ب' نقطہ ج پر تصادم ہوئے ہیں اور ج پر مشترک عماد ج ف ہے۔ فرض کرو کہ تصادم کے



شکل (۱۲۷)

لمحہ پر ان اجسام کے مراکز ثقل دونوں
خط ج ف پر واقع ہیں اور فرض
کریں کہ کمیتوں 'ا' 'ب' کے مراکز ثقل
کی رفتاروں کے اجزائے ترکیبی عماد
ج ف کی سمت میں

ء، ء تصادم سے قبل
و، و بڑے سے بڑے پچکاؤ کے

لمحہ پر
اور و، و تصادم کے بعد
ہیں۔ اب اگر پچکاؤ کے دھکے کو د سے تعبیر کیا جائے اور عود کے دھکے کو
د سے تو

$$(۸۵) \quad د = ک (۶ - و) = ک (۶ - و)$$

$$(۸۶) \quad د = ک (و - و) = ک (و - و)$$

پہلی مساوات سے

$$ء = و + \frac{د}{ک}$$

$$ء = و - \frac{د}{ک}$$

$$\text{اس لیے} \quad ۶ - ۶ = د \left(\frac{۱}{ک} + \frac{۱}{ک} \right)$$

یہ مساوات تصادم سے پیشتر جو اضافی رفتار ہے اس کو د سے مربوط
کرتی ہے۔

اسی طرح مساواتوں (۸۶) سے

$$و - و = د \left(\frac{۱}{ک} + \frac{۱}{ک} \right)$$

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ تجربی ربط $\dot{d} = \dot{c} \dot{c}$ ' ربط

$$\dot{w} = \dot{c} - (\dot{c} - \dot{c})$$

کے ٹھیک مائل ہے یعنی الفاظ میں: تصادم کے بعد مرکز ثقل کی اضافی رفتار کا عمادی جزو ترکیبی تصادم سے قبل اضافی رفتار کا چ گنا اور اسکی

مخالف سمت میں ہوتا ہے۔

اس قانون کو نیوٹن کا تجربی قانون کہتے ہیں، اس سے مادہ کی وہی

خاصیت بیان ہوتی ہے جو ربط $\dot{d} = \dot{c} \dot{c}$ سے ظاہر ہے۔

ایک اور رشتہ جو تصادم سے قبل اور اس کے بعد کی رفتاروں کو مربوط کرتا ہے معیار حرکت کے بقا کے اصول سے حاصل ہوتا ہے چنانچہ

$$k + k' = k + k'$$

اس کو مساوات (۸۷) کے ساتھ ملانے سے ہم تصادم کے بعد کی

رفتاروں w و w' کو تصادم سے قبل کی رفتاروں c و c' کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں۔

ان مساواتوں کو حل کرنے سے معلوم ہوگا کہ

$$w = \frac{k + k' - c}{k + k'}$$

(۸۸)

$$w' = \frac{k + k' - c'}{k + k'}$$

(۸۹)

$$k + k'$$

ان سے عمادی رفتاریں حاصل ہوں گی۔

اگر اجسام کھردرے ہیں تو ہم حماسی رفتاروں کو اسی طریقے سے معلوم کرتے ہیں جو دفعہ ۲۰۰ میں بیان کیا جا چکا ہے، لیکن اگر اجسام چکنے ہیں تو ج ف کی عمودار سمتوں میں رفتاریں غیر متغیر رہتی ہیں۔

اگر ان دو اجسام کا مرکز ثقل ساکن ہو یا اگر ہم تمام رفتاروں کو مرکز ثقل کے لحاظ سے پیمائش کریں جس کا مطلب بھی وہی ہے تو

$$ک + ع = ع -$$

$$ک (ع - ع)$$

$$اس لیے و = - چ ک + ک$$

$$و = چ ک (ع - ع)$$

رابطہ ک + ع = ک - ع کو استعمال کرنے سے یہ مساواتیں
ہو جاتی ہیں

$$و = - چ ع$$

$$و = - چ ع$$

اور اس لیے اجسام ایک دوسرے سے باز گشت کرتے ہیں گویا کہ وہ
لچک چ کے ایک ثابت مستوی پر متصادم ہوئے تھے۔
توانائی بالحرکت تصادم سے قبل یا بعد، دو توانائیوں کے مجموعہ
کے مساوی ہوگی (۱) اس واحد ذرہ کی توانائی بالحرکت جو مرکز ثقل کے ساتھ
حرکت کر رہا ہے (۲) نظام کی توانائی بالحرکت بلحاظ مرکز ثقل کے۔ اول الذکر
توانائی تصادم سے غیر متغیر رہتی ہے اور اس لیے تصادم کی وجہ سے کل توانائی
بالحرکت میں جو نقصان واقع ہوتا ہے وہ اس توانائی کے نقصان کے
مساوی ہے جو مرکز ثقل کے لحاظ سے ہے۔

اگر اجسام چکنے ہیں تو توانائی بالحرکت کا یہ نقصان

$$= \frac{1}{2} (ک + ع - ک - ع)$$

$$= \frac{1}{2} (ک + ع - ک - ع) (۱ - چ)$$

اس طرح توانائی بالحرکت کا نقصان مرکز ثقل کے لحاظ سے ابتدائی توانائی
بالحرکت کے (۱ - چ) گئے کے مساوی ہے۔ اگر اجسام کامل طور پر لچکدار
ہیں تو چ = ۱ اور اس لیے توانائی میں کوئی نقصان واقع نہیں ہوتا۔ لیکن
اگر چ = ۰ تو مرکز ثقل کے لحاظ سے ابتدائی توانائی پوری کی پوری نقصان
میں آ جاتی ہے۔

دو چکنے کروں کا تصادم

۲۰۲۔ فرض کرو کہ تصادم کے بعد دو چکنے کروں کی حرکت معلوم کرنے میں ہم اوپر کے اصولوں کو استعمال کرتے ہیں۔

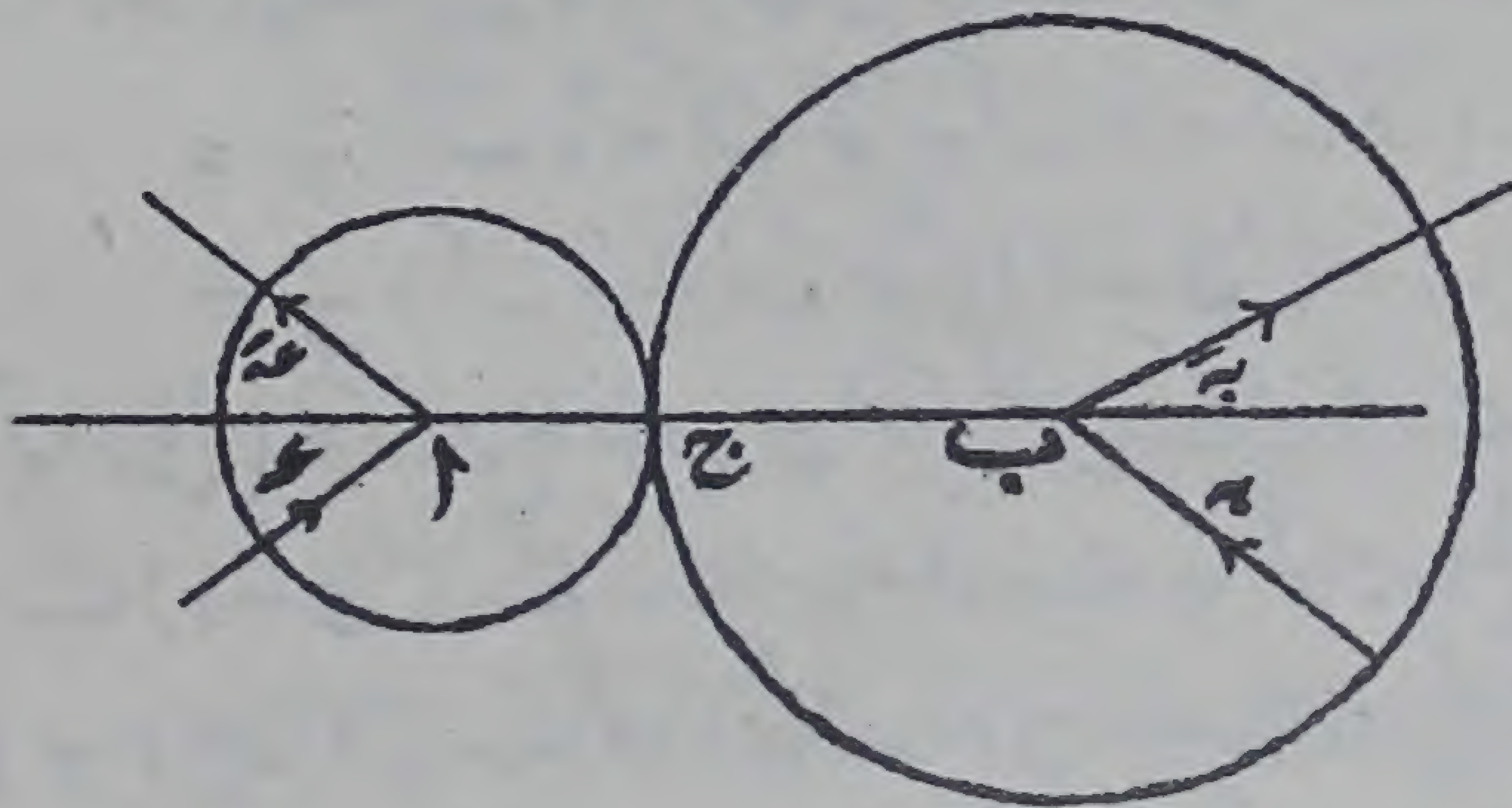
فرض کرو کہ تصادم کے لمحہ پر کروں کے مرکز ثقل 'ا' 'ب' ہیں اور اس لیے خط 'ا' 'ب' تصادم کے نقطہ 'ج' پر سطحوں کا مشترک عماد ہے۔ سب سابق فرض کرو کہ تصادم سے قبل 'ا' 'ب' پر رفتاریں 'ع' 'ع' ہیں اور ان دونوں کو سمت 'ا' 'ب' میں پیمائش کیا گیا ہے اور فرض کرو کہ تصادم کے بعد اسی سمت میں رفتاریں 'و' 'و' ہیں۔ تب معیار حرکت کے بقا کی رو سے 'ا' 'ب' پر

$$ک + ع = ک + ع = و + و$$

اور نیوٹن کے قانون سے $و = و = ج (ع - ع)$

ان سے مساواتیں (۸۸) اور (۸۹) حسب سابق حاصل ہوتی ہیں۔ اگر تصادم سے قبل اور بعد 'ا' کی رفتاریں 'ا' 'ب' کے ساتھ زاوے 'ع' 'ع' بناتی ہیں (حسب شکل) تو تصادم سے قبل اور بعد ماسی رفتاریں $ع مس ع$ و $ع مس ع$

ہیں۔ لیکن چونکہ ماسی رفتاریں غیر متغیر رہتی ہیں اس لیے



شکل (۱۲۸)

وَسَّ عَ = عَسَّ عَ

اسی طرح ب کی حرکت سے

وَسَّ بَ = عَسَّ بَ

اس لیے مساواتیں (۸۸) اور (۸۹) ہو جاتی ہیں

مَمَّ عَ = $\frac{ک + ع + ک + ع - (ع - ع)}{ک + ک + ع}$ مَمَّ عَ

مَمَّ بَ = $\frac{ک + ع + ک + ع - (ع - ع)}{ک + ک + ع}$ مَمَّ بَ

اور ان سے عَ، بَ ابتدائی حرکت کی رقوم میں معلوم ہوتے ہیں۔

(۲۴۸) اگر کُرے مساوی کمیت کے ہوں اور دوسرا کُرہ ابتدا ساکن ہو جیسے کہ بلیرڈ کے کھیل میں ہوتا ہے تو ک = ک'، ع = ع'۔ اور اس لیے

مَمَّ عَ = $\frac{۱}{۲} (۱ - ج)$ مَمَّ عَ، بَ =

اس طرح ب، مرکزوں کے خط پر حرکت کی ابتدا کرتا ہے اور صریحاً ایسا ہی ہونا چاہئے کیونکہ وہ قوتیں جو اس کو حرکت میں لاتی ہیں اس خط پر عمل کرتی ہیں۔

چونکہ ج ہمیشہ اکائی سے کم ہوتا ہے اور ع ضرور حادہ ہے اس لیے مَمَّ عَ منفی ہوتا چاہئے اور اس لیے عَ منفی ہوگا۔ اگر ج = ۱ تو ع = ۰ چنانچہ اگر کُرے کا بل چکنے اور کا بل لچکدار ہوں تو تصادم کے بعد کُرہ ۱ مرکزوں کے خط کے علی القوالم حرکت کرے گا، اس کی حرکت وہی ہوگی جو ہوتی اگر وہ کا بل چکنے اور بے لچک مستوی سے ٹکراتا۔

توضیحی مثال

ایک کھردرے مینر پر چند مشابہ سکوؤں کو مساوی فاصلوں پر ایک خط مستقیم میں رکھا گیا ہے۔ پہلے سکہ کو اس خط پر

اس طرح متحرک کیا جاتا ہے کہ وہ دوسرے سکے سے راست ٹکرائے۔
حاصل حرکت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ دو سکوں کے درمیان تصادم کے لیے لچک کی قدر ج ہے
اور سکوں اور میز کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہے۔ فرض کرو کہ ہر سکہ کی کمیت ک
ہے اور دو متصل سکوں کے قریب ترین نقطوں کے درمیان فاصلہ ف ہے۔
ایک سکہ اور میز کے درمیان عمادی تعامل ک ج ہے اور اس لیے
سکہ کی حرکت میں مزاحم رگڑ کی قوت مہ ک ج ہے اور پیدا شدہ ابطاء مہ ج
ہے۔ پس اگر ایک سکہ اپنے ابتدائی محل سے رفتار و سے چلے تو اس کی رفتار
دوسرے سکہ تک پہنچنے میں ۶ ہو جائے گی جہاں

$$و' - ۶ = ۲ مہ ج ف$$

(۱)

اب ہمارے پاس مساوی کمیت کے دو سکے ہیں جو رفتاروں ۶، ۶ سے
ٹکراتے ہیں تصادم کے بعد ان کی رفتاریں و' و' حسب ذیل مساواتوں سے حاصل
ہوتی ہیں:

$$و - و' = ج ۶ \text{ (قانون نیوٹن)}$$

$$و + و' = ۶ \text{ (معیار حرکت کا بقا)}$$

$$\text{اس لیے } و = \frac{۱}{۲} ۶ (۱ - ج)$$

$$و' = \frac{۱}{۲} ۶ (۱ + ج)$$

تصادم کے بعد وہ سکہ جو ابتداً حرکت میں تھا رفتار و حاصل کرتا ہے اور
رگڑ کی قوت سے اس میں ابطاء مہ ج پیدا ہوتا ہے۔ اس لیے وہ ساکن
ہو جائے گا اگر وہ اس اثنا میں فاصلہ س طے کرنے کے بعد پھر نہ ٹکرائے
جہاں س، مساوات

$$و' = ۲ مہ ج س$$

$$س = \frac{و'^۲}{۸ مہ ج} = \frac{۲}{۶ (۱ - ج)^۲}$$

یا

(ب)

(۲۴۹)

سے حاصل ہوگا۔ وہ سکے جو تصادم کی وجہ سے حرکت میں آیا ہے رفتار

$$w = \frac{1}{4} (1 + j) \quad (ج)$$

سے حرکت کی ابتدا کرتا ہے۔ اس سے پہلے کا ایک رفتار و سے حرکت کی ابتدا کیا تھا یہ رفتار مساوات (۱) سے حاصل ہوتی ہے۔ اب مساواتوں (۱) اور (ج) سے w کو سا قی کیا جائے تو ابتداً حرکت میں آنے کی متواتر رفتاروں کے درمیان رشتہ

$$w^2 = 2 \text{ مہ ج ف} + \frac{2}{(1 + j)^2} \quad (د)$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ ربط مستقل سروں والی فرق کی مساوات ہے۔ اگر $j = 1$ تو ہم مساوات (ب) سے دیکھتے ہیں کہ $s =$ ۔ اور اس لیے ہر سکے اپنے سامنے کے سکے سے ٹکرانے کے بعد مطلقاً ساکن ہو جاتا ہے، وہ اپنا پورا معیار حرکت اس سکے میں منتقل کر دیتا ہے۔ نیز مساوات (۱) سے $w = 2 \text{ مہ ج ف}$

جب n سکوں کے درمیان معیار حرکت منتقل ہو چکتا ہے تو رفتار کے مربع کی قیمت بقدر $2n \text{ مہ ج ف}$ کے گھٹ جاتی ہے۔ اس طرح کسی نقطہ پر متحرک سکے کی رفتار وہ رفتار ہوتی ہے جو ایسے سکے کی ہوتی جو رفتار w سے حرکت کی ابتدا کرتا اور وہ فاصلہ طے کرتا جو ان سکوں کے درمیانی تمام وقفوں کے مجموعے کے مساوی ہے جن پر سے حرکت منتقل ہوئی ہے۔ اگر $f =$ ۔ یعنی اگر سکے ابتداً ایک دوسرے کو مس کر رہے ہوں تو

$$w = \frac{2}{1 + j}$$

پس اگر n سکے ہیں تو n والے سکے رفتار

$$w = \frac{2}{(1 + j)^n}$$

سے حرکت کی ابتدا کرے گا۔

مثالیں

۱۔ اوّلے ایک منجد تالاب کی سطح پر ایسی سمت میں ٹکراتے مشاہدہ کئے گئے ہیں جو انتصابی کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے اور وہ ٹکراتے کے بعد ۶۰° کے زاویہ پر بازگشت ہوتے ہیں۔ تماس کو چکنا تسلیم کر کے لچک کی قدر معلوم کرو۔

۲۔ اگر مثال ماسبق کے اوّلے تصادم کے بعد ۲ فٹ کے ارتفاع تک اچھلیں تو وہ رفتار معلوم کرو جس سے وہ ابتداً زمین سے ٹکراتے تھے۔

۳۔ مثال ماسبق میں وہ ارتفاع معلوم کرو جہاں تک اوّلے برف پر سے دوسری بار بازگشت کرنے میں اچھلیں گے۔

۴۔ ایک گولے کو ایک افقی فرش پر گرایا گیا ہے جو دو مرتبہ بازگشت کرنے کے بعد ایک ایسے ارتفاع تک اچھلتا ہے جو اس ارتفاع کا نصف ہے جہاں سے وہ گرایا گیا تھا۔ لچک کی قدر معلوم کرو۔

۵۔ ایک گولی ایک کھردرے نشانہ پر ۵° کے زاویہ پر ٹکراتی ہے اور اسی زاویہ پر بازگشت ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ

$$m = \frac{1 - e}{1 + e}$$

۶۔ ایک گولہ جس کو فاصلہ ۱ سے سر کیا گیا ہے ایک نشانہ سے زاویہ قائمہ پر ٹکراتا ہے اور بازگشت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ نشانہ سے فاصلہ ۱ ج پر گرے گا (ہوا کی مزاحمت نظر انداز کرو)۔

۷۔ کمیت ک کا ایک کرہ کمیت ک کے ایک ساکن کرہ سے ٹکراتا ہے۔ ان کے درمیان تماس چکنا ہے اور تصادم کے بعد ان کے راستے ایک دوسرے کے علی القوائم مشاہدہ کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ $k = \frac{1}{2}$ ۔

۸۔ بلیڈ کے دو گولے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اور ساکن ہیں، ایک تیسرا گولہ ایک ساتھ ان سے ٹکراتا ہے اور تصادم کے بعد ساکن

ہو جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 ۹۔ ایک چکنے افقی مستوی پر کے ایک نقطہ سے ایک ذرہ کو رفتار u کے ساتھ ارتفاع h پر پھینکا گیا ہے اور یہ ذرہ مستوی سے ٹکرانے کے بعد مستوی پر متعدد مرتبہ بازگشت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی پرواز کا کل وقت $\frac{2}{g} \sin \theta$ ہے اور اس کا

کل پٹہ $\frac{2}{g} \sin \theta$ ہے۔
 ج (۱-ج)

۱۰۔ ایک کھلاڑی ایک دیوار سے افقی فاصلہ f پر کھڑا ہے اور وہ ایک گولے کو دیوار کی جانب افقی سے میلان θ پر پھینکتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر گولہ بازگشت کرنے کے بعد کھلاڑی کے پاس واپس ہو تو جس رفتار سے کھلاڑی نے اُسے پھینکا ہے وہ حسب ذیل ہونی چاہئے:-

ج (۱+ج) f

$\frac{2}{g} \sin \theta$ جم θ (جب $\theta = 0$ ۔ مہ جم θ)

جہاں ج اور θ لچک اور رگڑ کی قدریں ہیں۔

۱۱۔ مثال ماسبق میں حسب ذیل صورتوں پر غور کرو:

(۱) ج = ۰، (ب) مہ = مس θ ، (ج) مہ < مس θ

عام مثالیں

۱۔ ایک چکنا فائے ایک افقی مینہ پر پھسل سکتا ہے اس کے رخ پر ایک ذرہ رکھا گیا ہے۔ معلوم کرو کہ فائے کو کس طرح متحرک کرنا چاہئے کہ ذرہ نہ اڑے نہ چڑھے نہ نیچے اترے۔ نیز ذرے اور فائے کے درمیان دباؤ معلوم کرو۔

۲۔ ریل کا ایک ہموار برقی راستہ ہے جس پر نصف میل کے فاصلوں سے اسٹیشن ہیں۔ اس راستہ پر ۱۰۰ ٹن کی ٹرینوں کو ۱۲ میل فی گھنٹہ کی اوسط رفتار سے چلانا مقصود ہے جس میں ہر اسٹیشن پر نصف منٹ کا قیام بھی شامل ہے۔ ثابت کرو کہ برقی حرارے کے کم از کم خرید ۸ ٹن وزنی ہونے چاہئیں اگر رگڑ کی قدر $\frac{1}{2}$ ہو

اور یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ٹرینوں میں مسلسل بریک لگے ہوئے ہیں۔ (انفعالی مزاحمتوں کو نظر انداز کرو)۔

ثابت کرو کہ اس ریلوے کو جاذبہ ارض سے چلایا جاسکتا ہے اگر راستہ اسٹیشنوں کے درمیان تقریباً ۶۰۰ فٹ کے نصف قطر تک نیچے وار منحنی ہو اور یہ کہ اسٹیشنوں کے درمیان میلان (Dip) تقریباً ۲۰ فٹ، اسٹیشنوں پر دھال تقریباً ۳۳ میں ۱ اور اعظم رفتار تقریباً $\frac{1}{4}$ میل فی گھنٹہ۔

۳۔ ارتفاع ف اور قطر و کا ایک اسطوانہ ریل کے ایک ڈبہ کے فرش پر استادہ ہے اور ڈبہ دفعتاً اسراع ع کے ساتھ حرکت کرنا شروع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ ڈبے کے لحاظ سے صرف اُس وقت ساکن رہے گا جبکہ ع، مرج اور $\frac{وج}{ف}$ دونوں سے کم ہو۔

۴۔ ایک دائری طوق پھینکا گیا ہے جو ایکساں گھومتا ہوا غیر متقلب حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا مرکز ایک قطع مکانی مرتسم کرے گا اور کور کا تناؤ کور کے طول $\frac{و}{ج}$ کے وزن کے مساوی ہوگا جہاں و، طوق کے مرکز کے لحاظ سے کور کی رفتار کو تعبیر کرتا ہے۔

۵۔ ۶ فٹ لمبی ایک ایکساں زنجیر جس کی کمیت فی فٹ ۲ پونڈ ہے ایک کھردرے افقی مینر پر خط مستقیم کی شکل میں پڑی ہے اور اس کا کچھ حصہ مینر کے کنارے پر سے نیچے لٹک رہا ہے اور پھسلن عین واقع ہونے کو ہے۔ زنجیر اور مینر کے درمیان رگڑ کی قدر $\frac{1}{4}$ ہے۔ اگر ذراستہ خلل سے زنجیر پھسلنے لگے تو مینر کے کنارے پر زنجیر کا تناؤ معلوم کرو جبکہ اس کا لافٹ طول پھسل چکے۔

۶۔ دو مساوی گولے 'ا' ب جن میں سے ہر ایک کی کمیت ک ہے ایک دوسرے سے فاصلہ ۱ پر ہیں۔ 'ا' پر دھک ۲ سمت 'ب' میں عمل کرتا ہے اور 'ب' پر ایک مستقل قوت ف اسی سمت میں عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ 'ا' ب سے نہ ملیگا اگر

(۲۵۱)

د > ۲ ا ف ک

۷۔ ایک گولی کا وزن ایک اونس ہے، اس کو ایک درجہ کے ارتفاع پر رفتار ۱۲۰۰ فٹ فی ثانیہ سے فائر کیا گیا ہے، یہ گولی اپنے راستہ کے بلند ترین نقطہ پر ایک پرندے سے جا لگتی ہے جس کا وزن $2\frac{1}{4}$ پونڈ ہے۔ یہ فرض کر کے کہ جب گولی پرندے پر پڑی تھی تو وہ ساکن تھا اور اس کے بعد پیوست شدہ گولی کے ساتھ پیچھے گرا معلوم کرو کہ فائر کرنے کے نقطہ سے کتنی دور پرندہ گرا ہو گا۔

۸۔ ایک گولی کا وزن ۱ پونڈ ہے، اس کو رفتار ۱ سے ایک جسم پر فائر کیا گیا ہے جو رفتار ۱ سے آگے جا رہا ہے اور جس کا وزن ۱ ہے۔ ثابت کرو کہ جسم کی رفتار گولی کی ضرب پڑنے کے بعد

$$\frac{1}{1+2} \text{ یا } \frac{2}{3} \text{ (۱-۶)}$$

ہو جائے گی بموجب اس کے کہ گولی جسم میں پیوست ہو جائے یا اس کو چھید کر رفتار سے حرکت کرے۔

آزاد شدہ توانائی محسوب کرو اور پھر جسم کی اوسط مزاحمت گولی سے چھدے ہوئے طول کے ذریعہ معلوم کرو۔

۹۔ ایک وزن اوپر سے ایک مینج پر گرتا ہے اور اپنے متواتر دھکوں سے مینج کو زمین میں دھکیلتا جاتا ہے۔ ہر ضرب پر مینج جس حد تک زمین میں دھنستی ہے وہ کس طرح (ا) وزن کی مقدار پر اور (ب) اس کو جس ارتفاع تک اٹھا کر چھوڑا گیا ہے اس پر منحصر ہوگی؟

اگر وزن ایک ٹن ہے اور جس ارتفاع سے وہ گرتا ہے وہ ۱۰ فٹ ہے اور مینج زمین میں $\frac{1}{2}$ انچ دھنستے تو مزاحمت (ٹنوں میں) معلوم کرو۔

۱۰۔ ایک بے لچک مینج کی کمیت ک پونڈ ہے اور ایک ہتھوڑی جس کی کمیت ک ہے انتصاباً با فاصلہ ف میں سے گر کر اس پر ضرب لگاتی ہے اور ہر ضرب پر مینج زمین میں ۱ فٹ انتصاباً دھنستی ہے۔ ثابت کرو کہ مینج کو زمین میں بتدریج دھکیلنے کے لیے جو وزن سرے پر رکھنا ہو گا وہ

$$k + \frac{k^2}{(k+k)}$$

-4-

۱۱۔ ایک ہتھوڑی کا سیرا و پونڈ ہے، یہ سیرا اقلار و قس فی ثانیہ سے حرکت کر کے ایک بے لچک کیلے پر پڑتا ہے جس کا وزن و پونڈ ہے اور وہ گ پونڈ کے ایک حرکت پذیر تختے میں نصب ہے۔ ثابت کرو کہ اگر کیلے کے دھنسے میں تختے کی اوسط عرض احمیت کا پونڈ کی ایک قوت ہو تو ہر ضرب پر کیلا تختے میں

$$\frac{\text{گ و}^2}{(\text{گ} + \text{و} + \text{و})(\text{و} + \text{و})} \frac{\text{ر}^2}{\text{ج ر} \sqrt{\text{ق}}}$$

دینیگا۔

۱۲۔ چرخوں کے اس نظام میں جس کا بیان دفعہ ۱۲^م میں کیا گیا ہے
ثابت کرو کہ اگر ف ایک وزن ہو جو $\frac{1}{9}$ کے مساوی نہیں ہے تو وزن و میں پیدا شدہ
اسراع

ج $\frac{n \text{ ف} - \text{و}}{n \text{ ف} + \text{و}}$

— 65 —

۱۳۔ دو کمیتیں کہ ایک لچکدار ڈوری کے ذریعہ ملحق ہیں اور ایک چکنے افقی میز پر رکھی گئی ہیں، کمیتیں ساکن ہیں اور ڈوری بے تنی ہوئی ہے۔ دھکے ف کی ایک ضرب پہلی کمیت پر لگائی گئی ہے اس سمت میں جو دوسری کمیت کی سمت کے مخالف ہے۔ ثابت کرو کہ جب ڈوری پھر بے تنی ہوئی حالت میں ہوتی ہے تو دوسری کمیت کی رفتار

$$\frac{۲۰}{۲۰}$$

-4

۱۴۔ ایک تا امتداد پیدووری کے میروں اور وسطی نقطہ پر تین مساوی

ذرے باندھے گئے ہیں اور ڈوری کو پوری طرح تنی ہوئی حالت میں ایک چکنے مینر پر رکھا گیا ہے۔ وسطی ذرہ جھٹکے کے ساتھ اس سمت میں حرکت میں آتا ہے جو دوسرے ذروں کو ملانے والے خط پر عمود ہے۔ توانائی کا نقصان معلوم کرو جب دوسرے ذرے جھٹکے کے ساتھ حرکت میں آتے ہیں۔

۱۵۔ کوئلہ لیجانے والی ایک ٹرین میں متعدد مشابہ ڈبے ہیں جن کو ایک انجن کھینچتا ہے جس کا وزن تین ڈلوں کے عین مساوی ہے۔ ٹرین ہموار راستہ پر ساکن ہے اور جوڑک (Couplings) جو مساوی طول کے ہیں سب کے سب برابر ڈھیلے ہیں۔ انجن ایک مستقل جری قوت کے ساتھ حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور ہر ڈبہ جھٹکے کے ساتھ حرکت میں آتا ہے جبکہ اسکا جوڑک تن جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ انجن کی چال بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ دسواں جھٹکے عین واقع ہونیکو ہو۔

۱۶۔ برف ایک چھت پر مساوی طور پر پھیلی ہوئی ہے۔ اگر اس کی کچھ کمیت پھسلنا شروع کرے اور جاتے ہوئے ایکساں عرض کا راستہ بناتے جائے تو ثابت کرو کہ اس کا اسراع مستقل ہے اور اس اسراع کے ایک ثلث کے مساوی ہے جو اس کمیت کا ہوگا جو آزادانہ چھت کے نیچے پھلے۔

۱۷۔ ایک وزنی اور کامل ملائم یکساں ڈوری انتصاباً لٹک رہی ہے اور اس کا زیر ترین نقطہ ایک بے پچک افقی مستوی کے اوپر ارتفاع f پر ہے۔ اگر اس کو مستوی پر گرنے کے لیے دفعتاً چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ جب مینر پر ڈوری کا طول لاگڑ پڑتا ہے تو مینر پر دباؤ

$$(3 + 2f) \text{ ک ج}$$

ہے۔

۱۸۔ اگر دو مساوی گولے رفتاروں $\frac{a+b}{2}$ اور $\frac{a-b}{2}$ کے ساتھ

متصادم ہوں تو ثابت کرو کہ اول الذکر ساکن ہو جائے گا۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ ایک کرہ کی وہ کمیت k جو کمیت k کے ایک ساکن کرہ اور رفتار w سے ٹھیک اس کی جانب حرکت کرنے والے کمیت k کے

$$\frac{k^2 + k + k}{k^2 + k + k}$$

(r or)

$$\frac{f+1}{f-1} \cdot f \cdot \sqrt{\frac{f+1}{f}} = \text{ثانیوں میں}$$

ف = ۱، ج = $\frac{4}{9}$ کے لیے اس کا حساب لگاؤ۔

۲۲۔ ایک لڑکا ریل کے ایک ڈبے کی افقی چھت پر جویل کے نیچے سے
رفتار ۱۵ میل فی گھنٹہ سے جا رہا ہے ایک گولے کو چھوڑتا ہے۔ اگر چھت اور گولے کے درمیان
مہ = $\frac{1}{4}$ ' ج = $\frac{1}{2}$ تو چھت کے اوپر لڑکے کے ہاتھ کا کم از کم ارتفاع معلوم کرو تاکہ
گولے کی دوسری بازگشت چھت کے اسی نقطہ سے ہو جس سے پہلی بازگشت
ہوئی تھی۔

اگر لڑکے کا ہاتھ اس سے زیادہ ارتفاع پر پہنچے تو کیا واقعہ ہوگا۔

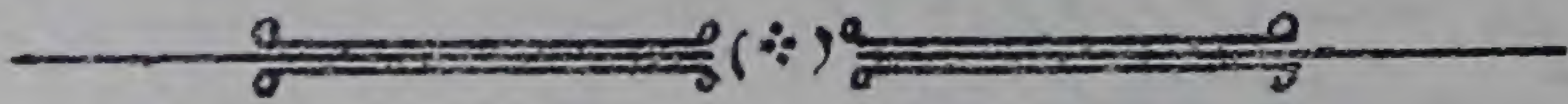
۲۳۔ ایک کامل طور پر لحیکدار ذرہ کو پھینکا گیا ہے، یہ ذرہ ایک گردشی سطح کے اندرونی حصہ سے ٹکراتا ہے، گردشی سطح کا محور ایک معلومہ انتہائی

خط ہے۔ ثابت کرو کہ ان سب مکافیوں کے راس جو متواتر بازگشتوں سے مرتسم ہوتے ہیں ایک سطح پر واقع ہوتے ہیں جس کی شکل گردشی سطح کی شکل پر منحصر نہیں ہوتی۔
۲۴۔ ثابت کرو کہ قطر ۱ کے ایک چکنے بلیرو گولے کی حرکت کی سمت میں ایک دوسرے ساکن مساوی گولے پر تصادم کے ذریعہ زیادہ سے زیادہ ممکن انحراف پیدا کرنے کے لیے قبل الذکر کو ایک ایسی سمت میں پھینکنا ہوگا جو مرکزوں کو ملانے والے خط (طول ج) کے ساتھ زاویہ

$$\text{جب } \left(\frac{1}{J} \mid \frac{1-J}{J-3} \right)$$

بنائے۔

۲۵۔ ایک رواق اس طرح لٹک رہا ہے کہ اس کا لنگر ایک چکنے انتصائی مستوی کو عین مس کرتا ہے۔ لنگر کو ایک جانب کھینچا گیا یہاں تک کہ وہ پہلے کی بہ نسبت ۵ انچ زیادہ بلند ہوا اور پھر اس کو چھوڑ دیا گیا تاکہ مستوی سے عماد کی سمت میں ٹکرائے پہلی بازگشت میں وہ انتصاباً ۴ انچ اچھلتا ہے۔ اگر رواق کو اسی زاویہ میں سے ایک جانب کھینچا جائے لیکن اس طور پر کہ لنگر مستوی سے ایسے زاویے ٹکرائے جو عماد کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بنائے تو بازگشت میں لنگر انتصاباً کتنا اچھلے گا۔



دسواں باب

(۲۵۴)

متغیر قوت کے تحت ذرہ کی حرکت

۲۰۳۔ ایک ہم نے ذرہ کی حرکت کی صرف ان صورتوں پر بحث کی ہے جن میں ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں اس کی حرکت کے پورے راستہ میں مستقل تھیں اور اس لیے ذرہ کا اسراع مستقل تھا۔ اب ہم ایک ایسے ذرہ کی حرکت پر غور کریں گے جس پر وہ قوتیں عمل کرتی ہیں جو ذرہ کے راستے پر نقطہ بہ نقطہ متغیر ہوتی ہیں۔

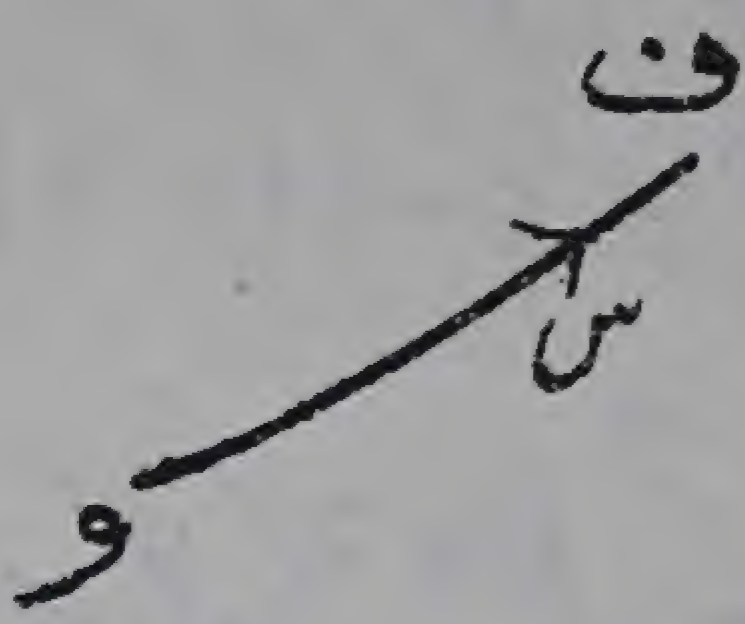
اس قسم کی حرکت کے مسائل دو جماعتوں میں تقسیم کئے جاسکتے ہیں، ایک تو وہ جس میں راستہ جو ذرہ طے کرتا ہے مسئلہ کے معطیات کے طور پر دیا گیا ہو اور دوسری وہ جس میں یہ راستہ نامعلوم ہو۔ اول الذکر جماعت سادہ ترین ہے اور اس لیے اول ہم اسی پر غور کریں گے۔ اس میں وہ صورتیں شامل ہیں جو نمونہ متاحسب ذیل ہیں: رقاص کی حرکت جس میں رقاص کا لنگر، رقاص کے لٹکانے کی میکانیت کی وجہ سے ایک دائرہ مرتسم کرنے پر مجبور ہے، تار میں پروئے ہوئے منکے کی حرکت جس میں منکا وہ راستہ طے کرنے پر مجبور ہے جو تار سے نشان زدہ ہے۔

حرکت کی مساوات

۲۰۴۔ فرض کرو کہ ذرہ اپنے راستہ کا فاصلہ s کسی لمحہ t پر طے کرتا ہے،

یہ فاصلہ راستہ کے کسی ثابت نقطہ سے پیمائش کیا جاتا ہے۔ اب راستہ پر ذرہ کی رفتار $\frac{فرس}{فرت}$ ہے۔ اس کو دو سے تعبیر کرنے سے ذرہ کا اسراع

$\frac{فرو}{فرت}$ یا $\frac{فرس^۲}{فرت^۲}$ حاصل ہوتا ہے۔



اگر عمل کرنے والی قوتیں معلوم ہوں تو بھی ہم اسراع کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ چنانچہ اس کے لیے تمام قوتوں کو جو ذرہ پر عمل کرتی ہیں راستہ کی

شکل (۱۲۹)

سمت میں تحلیل کرنا چاہئے۔ اگر اس سمت میں قوت کا جزو تیریکی میں ہے تو حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے ذرہ کی حرکت کی مساوات

$$س = ک \frac{فرو}{فرت} \quad (۹۰)$$

$$س = ک \frac{فرس^۲}{فرت^۲} \quad (۹۱)$$

یا

ہوگی۔

ہم فرض کریں گے کہ قوت کا میدان دائی ہے اور اس لیے مقدار س کے متعلق یہ فرض کیا جاسکتا ہے کہ وہ صرف اسی محل پر منحصر ہوتی ہے جو ذرہ اپنے راستہ پر اختیار کرتا ہے اور اس لمحہ پر منحصر نہیں ہوتی جس پر وہ وہاں پہنچتا ہے۔ یہ الفاظ دیگر س، کا ایک تفاعل ہے نہ کہ ت کا۔ مساوات (۹۱) س اور ت میں ایک تفرقی مساوات ہے اور اگر ہم اس کو حل کر سکیں تو ذرہ کی حرکت کا پورا علم ہو جائیگا بشرطیکہ اس کا راستہ معلوم ہو۔

یہ مساوات دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات ہے لیکن اس کو آسانی کے ساتھ پہلے رتبہ کی مساوات میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ کیونکہ

$$\frac{فرس}{فرت^۲} = \frac{فرو}{فرت} = \frac{فرس}{فرت} = \frac{فرو}{فرت} = \frac{فرس}{فرت}$$

اس لیے مساوات لکھی جاسکتی ہے۔

$$س = ک و \frac{فر}{فرس}$$

اب چونکہ س، س کا تفاعل ہے اس مساوات کو س کے لحاظ سے تفرق کیا جاسکتا ہے، چنانچہ

$$(۹۲) \quad م + س فرس = \frac{۱}{۴} ک و$$

جہاں م تکمل کا مستقل ہے۔

چونکہ و، $\frac{فر}{فرس}$ کے مساوی ہے اس لیے اس مساوات کو شکل

$$(۹۳) \quad \frac{فر}{فرس} = \frac{۲}{۱} (م + س فرس)$$

میں رکھا جاسکتا ہے اور یہ درجہ اول کی مساوات ہے۔ اگر یہ حل ہو سکے تو مسئلہ مکمل طور پر حل ہو جائے گا۔

ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (۹۲) کی بائیں جانب 'ذرہ کی توانائی بالحرکت' ہے۔ نیز چونکہ ذرہ کے راستہ کی سمت میں اس کی حرکت میں مزاحم قوت س ہے اس لیے ذرہ کی توانائی بالقوہ

(۲۵۶)

س فرس

ہے۔ پس مساوات (۹۲) سے واضح ہے کہ توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کا مجموعہ مستقل رہتا ہے، یہ مساوات ذرہ کی حرکت کے لیے توانائی کی مساوات ہے۔ اگر ہمیں ذرہ کی حرکت کے کسی لمحہ پر کل توانائی معلوم ہو تو ہم مستقل م متعین کر سکتے ہیں اور پھر مساوات (۹۳) کو تکمیل کیا جاسکتا ہے اگر وہ ممکن ہے۔

توضیحی مثال

یہ تسلیم کر کے کہ جاذبہ کی قیمت، زمین کے مرکز سے فاصلہ کے

مربع کے بالعکس بدلتی ہے ایک مری کی حرکت معلوم کرو جس کو
ہوا میں انتصا یا پھینکا گیا ہے، جاذبہ کی تحقیق کا لحاظ
رکھو۔

فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر r ہے اور اس کی سطح پر جاذبہ کی قیمت J ہے
تب زمین کے مرکز سے r فاصلہ پر جاذبہ کی قیمت $J \frac{r^2}{r^2}$ ہوگی۔

چونکہ ذرہ، زمین کے مرکز سے کھینچے ہوئے ایک نصف قطر پر حرکت کرتا ہے
اس لیے ہم تمام فاصلوں کو زمین کے مرکز سے پیمائش کر سکتے ہیں اور دفعۃً 2 کے محدود
س کی بجائے فاصلہ r لے سکتے ہیں۔ قوت J کی قیمت، مری کے راستہ کی
سمت میں تحلیل شدہ، $J \frac{r^2}{r^2}$ ہے اور اس لئے حرکت کی مساوات

$$- \frac{J \frac{r^2}{r^2}}{r} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

ہے۔ توانائی کی مساوات بموجب مساوات (۹۲) حسب ذیل ہے:

$$m - \frac{J \frac{r^2}{r^2}}{r} = \frac{1}{2} k v^2$$

$$(A) \quad m + \frac{J \frac{r^2}{r^2}}{r} = \frac{1}{2} k v^2$$

فرض کرو کہ ذرہ کو زمین کی سطح سے رفتار v کے ساتھ پھینکا گیا تھا۔ مساوات
(A) میں $r = r$ رکھنے سے v کی قیمت حاصل ہونی چاہئے اور اس لیے

$$(B) \quad m + \frac{J \frac{r^2}{r^2}}{r} = \frac{1}{2} k v^2$$

اس مساوات سے ہر معلوم ہوگا۔ مساواتوں (A) اور (B) سے v کو ساقط
کیا جائے تو

$$J \frac{r^2}{r^2} (1 - \frac{1}{r}) = \frac{1}{2} k (v^2 - v_0^2)$$

$$(C) \quad v^2 - v_0^2 = \frac{2J}{k} (1 - \frac{1}{r})$$

اس سے کسی نقطہ پر رفتار معلوم ہوگی۔ نیز چونکہ $\frac{فر}{فرت} = فر$ اس لیے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$(د) \quad \frac{فر}{فرت} = \sqrt{و^2 - ۱ ج^2} \left(۱ - \frac{۱}{ر} \right)$$

$$(ع) \quad \frac{فر}{\sqrt{و^2 - ۱ ج^2} + ۱ ج^2} = ت$$

تکمیل کے عمل کی تکمیل کرنے سے وہ وقت معلوم ہو سکتا ہے جو راستہ کا کوئی حصہ طے ہونے میں لگتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم حل کے مختلف نمونوں پر غور کرتے ہیں۔ ہم مساوات (ج) سے دیکھتے ہیں کہ وہ معدوم ہوتا ہے جبکہ

$$ر = \frac{۱ ج^2}{و^2 - ۱ ج^2}$$

اس لیے اگر $و^2 > ۱ ج^2$ تو ۱ اور $و$ کے درمیان $ر$ کی ایک مثبت قیمت ہے جس کے لیے رفتار معدوم ہوتی ہے۔ پس اگر $و^2 > ۱ ج^2$ تو مرئی اس نقطہ تک جاتا ہے جس کا فاصلہ زمین کے مرکز سے $\frac{۱ ج^2}{و^2 - ۱ ج^2}$ ہے اور پھر زمین پر واپس گرتا ہے۔ اگر $و^2 < ۱ ج^2$ تو $ر$ کی کوئی مثبت قیمت حاصل نہیں ہوتی جس کے لیے $و$ معدوم ہو اور اس لیے ذرہ لاتناہی تک چلا جاتا ہے، وہ زمین کے جاذبہ سے صاف بچ نکلتا ہے۔

اگر $و^2 = ۱ ج^2$ تو رفتار لاتناہی پر معدوم ہوتی ہے، اس لیے ذرہ زمین کی کشش سے عین بچ جاتا ہے لیکن صرف صفر رفتار کے ساتھ۔ پھینکنے میں اس کی توانائی بالحرکت زمین کی کشش پر غالب آنے میں عین کافی ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ ہم اول اس خاص صورت $و^2 = ۱ ج^2$ پر غور کرتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (ع)

$$ت = \frac{فر}{\sqrt{و^2 - ۱ ج^2} + ۱ ج^2}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{r}}{\sqrt{1 + \frac{2}{r}}} + m$$

میں تحویل ہوتی ہے جہاں m تکمیل کا ایک نیا مستقل ہے۔
اگر ہم وقت کو پھینکنے کے لمحہ سے شمار کریں تو $t = 0$ حاصل ہونا چاہئے
جیکہ $r = 1$ اور اس لیے

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{r}}} + m$$

اور m کو ساقط کرنے پر

$$t = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{r}}} - \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{r_0}}} \quad (ف)$$

اس صورت میں جس میں $r_0 < 1$ مساوات (ع) کو تکمیل کرنے کے بعد حاصل
ہوتا ہے

$$t = \frac{\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{r}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{r_0}}}}{\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{r}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{r_0}}}} \quad \text{لوک}$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{r}}} - \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{r_0}}} + m \quad (گ)$$

جہاں m تکمیل کا ایک نیا مستقل ہے۔ اگر وقت کو اس لمحہ سے شمار کیا جائے جس پر
ذرہ کو پھینکا گیا تھا تو $t = 0$ کے لیے $r = 1$ حاصل ہونا چاہئے، اور اس لیے

$$0 = \frac{\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{r}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{r_0}}}}{\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{r}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{r_0}}}} + \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{r}}} - \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{r_0}}} + m$$

اور m کو ساقط کرنے پر ہم پھر وہ وقت معلوم کر سکتے ہیں جو راستہ کا کوئی حصہ طے
ہونے میں مطلوب ہوتا ہے صورت $r > 1$ پر بھی اسی طرح بحث کی جا سکتی ہے۔

اس کو طالب علم پر بطور مشق کے چھوڑا جاتا ہے۔

مثالیں

۱۔ پچھلی توضیحی مثال میں فرض کرو $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ اور معلوم کرو

(ا) بلند ترین ارتفاع جہاں تک ذرہ پہنچتا ہے

(ب) ذرہ کی پرواز کا وقت

۲۔ ایک شہاب زمین پر گر رہا ہے۔ فرض کرو کہ وہ لاتناہی سے صفر رفتار کے ساتھ نکلا تھا اور راست زمین پر گرا۔ زمین کی سطح پر جس رفتار سے وہ پہنچتا ہے اس کو معلوم کرو۔ نیز وہ وقت معلوم کرو جو شہاب اس نقطہ سے زمین کی سطح پر گرنے میں لیتا ہے جس کا فاصلہ زمین کے مرکز سے رہے۔

۳۔ ایک ذرہ فاصلہ $\frac{1}{2}$ سے قوت کے ایک مرکز پر گرتا ہے جو قانون $\frac{1}{r^2}$ کی بموجب کشش کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ راستہ کے نصف حصہ پر اوسط رفتار کو راستہ کے دوسرے نصف حصہ پر اوسط رفتار کے ساتھ حسب ذیل نسبت ہے:

$$2 - \pi : 2 + \pi$$

۴۔ قوت کے ایک مرکز پر گرنے کا وقت معلوم کرو جو قانون $\frac{1}{r^3}$ کی بموجب کشش رکھتی ہے۔

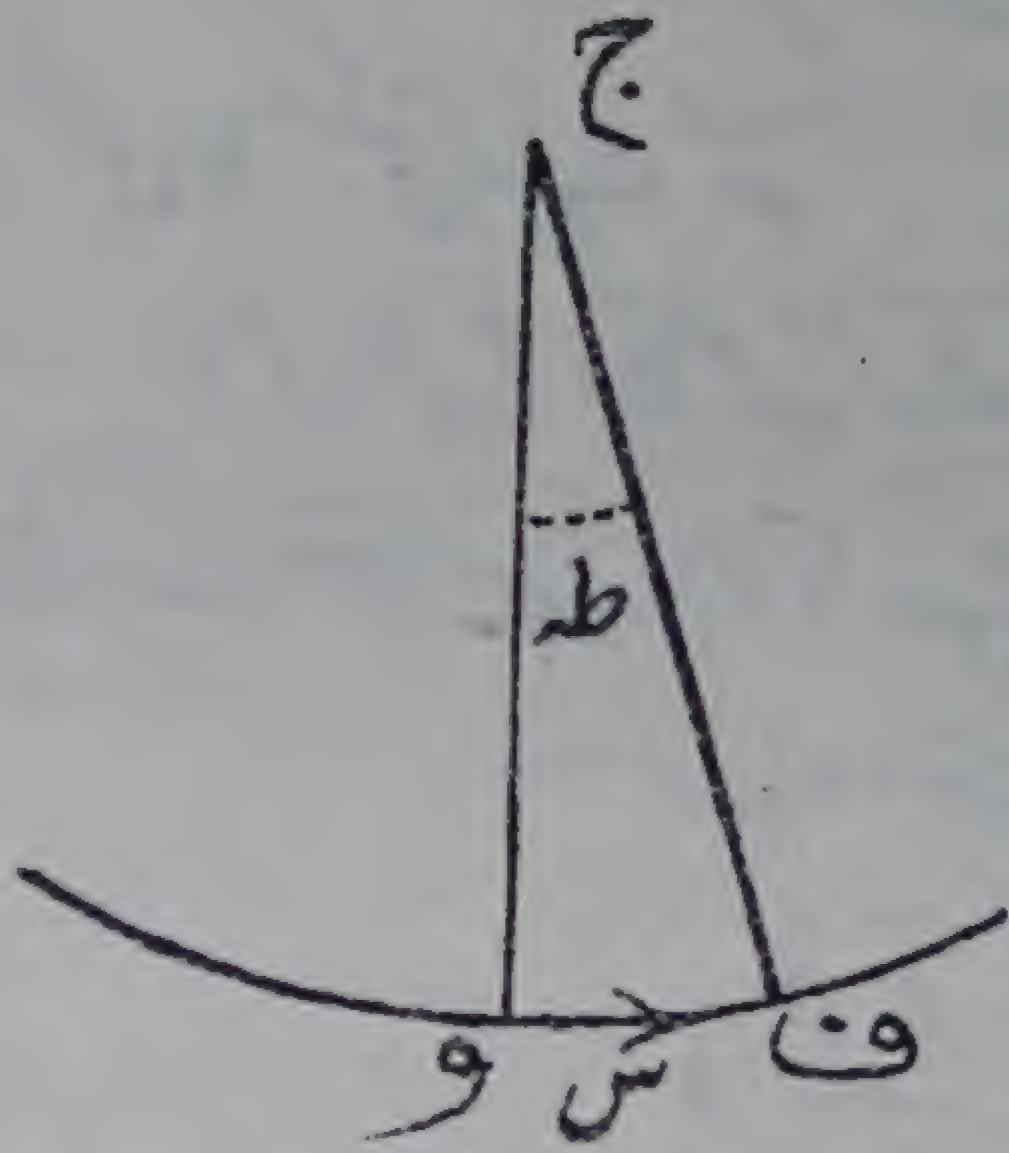
۵۔ ایک ذرہ فاصلہ $\frac{1}{2}$ سے کشش کے ایک مرکز کی جانب خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے۔ قوت کا قانون $\frac{1}{r^3}$ ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز تک پہنچنے میں جو وقت مطلوب ہے وہ $\frac{1}{2}$ ہے۔

۶۔ ایک ذرہ فاصلہ $\frac{1}{2}$ سے ایک ثابت مرکز کی جانب حرکت کرنا شروع کرتا ہے۔ قوت کا مرکز قانون $\frac{1}{r^3}$ کی بموجب دفع کرتا ہے۔ اگر ذرہ کی ابتدائی رفتار $\frac{1}{2}$ ہے تو ثابت کرو کہ وہ ثابت مرکز کی جانب مسلسل بڑھتا جائے گا لیکن اس تک کبھی بھی نہ پہنچے گا۔

سادہ رقاص

۲۰۵۔ متغیر قوت کی اہم ترین صورتوں میں سے ایک سادہ رقاص کی

حرکت سے مہیا ہوتی ہے۔ پہلا تقرب حاصل کرنے کے لیے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ رقاص کا پورا وزن اس کے لنگر میں مرکوز ہے جس کو ایک ذرہ خیال کیا جاسکتا ہے۔ اس لنگر کو ایک ثابت نقطہ سے ایک بے وزن ڈوری یا ونڈے کے ذریعہ لٹکایا جاتا ہے



شکل (۱۳۰)

اور اس لیے وہ ایک انتصابی دائرہ میں حرکت کرنے پر مجبور ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ اس دائرہ پر ذرہ جو فاصلہ طے کرتا ہے اس کو س سے تعبیر کیا گیا ہے جہاں س کو زیر ترین نقطہ سے پیمائش کیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ ڈوری اور انتصابی کے درمیان زاویہ ف ج و طہ سے

تعبیر ہوتا ہے اور اس لیے س = طہ جہاں طہ ڈوری کا طول ہے۔ ذرہ پر عمل کرنے والی قوت اس کے وزن اور ڈوری کے تناؤ پر مشتمل ہے۔ بعد الذکر اس سمت میں جس میں ذرہ حرکت کرتا ہے کوئی جزو ترکیبی نہیں رکھتی۔ اول الذکر کا جزو ترکیبی اس سمت میں۔ ک ج جب طہ ہے۔ اس لیے حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{فرس^2}{فرت^2} = - ج جب طہ \quad (۹۴)$$

$$جہاں طہ = \frac{س}{ر}$$

۲۰۶۔ اس مساوات کو ابتدائی ریاضی کے ذریعہ حل نہیں کیا جاسکتا الا اس سادہ صورت کے جس میں زاویہ طہ چھوٹا ہو یعنی جس میں رقاص انتصابی سے ایک چھوٹے زاویہ سے زیادہ نہ جھونے پائے۔ اس صورت پر اپنی توجہ محدود رکھنے سے ہم جب طہ کی بجائے طہ رکھ سکتے ہیں اور طہ کی

بجائے $\frac{س}{۱}$ - چنانچہ حرکت کی مساوات شکل

$$\frac{فر۲ س}{فر۲ ت۲} = - \left(\frac{ج}{۱} \right) س$$

میں لکھی جاسکتی ہے -

اس طرح رقاص کے لنگر کا اسراع، و کی جانب اور و سے اس کے فاصلے کے متناسب ہوتا ہے -
مساوات کو شکل

(۲۶۰)

$$\frac{فر۲ و}{فر۲ س} = - \left(\frac{ج}{۱} \right) س$$

میں لکھنے اور س کے لحاظ سے تکمیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$و^۲ = م - \left(\frac{ج}{۱} \right) س^۲ \quad (۹۵)$$

صریحاً مستقل م کو مثبت ہونا چاہئے اور رفتار معدوم ہوگی جوں ہی س ایسی قیمت پر پہنچے کہ

$$م = \left(\frac{ج}{۱} \right) س^۲$$

فرض کرو کہ اس مساوات کو پورا کرنے والی س کی قیمتیں $\pm س$ سے تعبیر ہوتی ہیں، تب لنگر کی حرکت صریحاً ان نقطوں کے اندر مقید رہتی ہے جو نقطہ و سے اس کی مخالف سمتوں میں فاصلہ س پر ہیں - ہم س کو اہتزاز کا محیط کہہ سکتے ہیں -

م کی بجائے $\left(\frac{ج}{۱} \right) س$ رکھنے سے مساوات (۹۵) ہو جاتی ہے

$$و^۲ = \frac{ج}{۱} (س^۲ - س^۲)$$

اس لیے

$$\sqrt{\frac{f}{s}} = \frac{f}{s} \quad \text{اور اس مساوات کا تکملہ ہے}$$

$$t = \sqrt{\frac{f}{s}}$$

$$= \sqrt{\frac{f}{s}} \text{ جم } \left(\frac{s}{s} \right) + \text{صہ}$$

جہاں صہ تکمیل کا مستقل ہے۔
اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم } \left(\frac{s}{s} \right) = \sqrt{\frac{f}{s}} (t - \text{صہ})$$

اس لیے $s = \text{جم } \left\{ \sqrt{\frac{f}{s}} (t - \text{صہ}) \right\}$

(۲۶۱) اس مساوات میں مسئلہ کا پورا حل شامل ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ s کی قیمتیں وقت t کے وقفوں سے مسلسل تکرار پاتی ہیں جہاں t ، مساوات

$$\sqrt{\frac{f}{s}} = t - \text{صہ}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح رقا ص کی حرکت لا انتہا مرتبہ خود تکرار پاتی ہے۔ ان دو لمحات کے درمیان وقفہ جن پر رقا ص ایک ہی محل میں ہوتا ہے یعنی وقفہ t ، مساوات

$$t = \sqrt{\frac{f}{s}}$$

سے حاصل ہوتا ہے اور اس کو رقاص کا دور کہتے ہیں۔

۲۰۷۔ ثانیوں کا رقاص۔ اُس رقاص کو بنانے کے لیے جو ثانیوں کو

ضربوں کے ذریعہ ظاہر کرے ہم اِکوا ایسا لیتے ہیں کہ تباہ دو ثانیوں کے مساوی ہو کیونکہ ثانیوں کا رقاص ایسا رقاص ہونا چاہئے جو بائیں جانب سے سیدھی جانب حرکت کرنے میں ایک ثانیہ اور پھر سیدھی جانب سے بائیں جانب حرکت کرنے میں ایک ثانیہ لے لے۔ اس لیے

$$1 = \frac{1}{J} \pi$$

فٹ ثانیہ اکائیوں میں ہم لندن کے لیے ج = ۳۲، ۱۹ لے سکتے ہیں اور اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$1 = ۳۹، ۱۲ \text{ انچ}$$

یعنی لندن کے لیے ثانیوں کے رقاص کا طول ۳۹، ۱۲ انچ ہونا چاہئے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ کسی رقاص کا دور اس کے طول کے جذرا المربع کے متناسب ہوتا ہے۔ مثلاً اُس رقاص میں جو نصف ثانیوں کو ضربوں کے ذریعہ ظاہر کرتا ہے اس کا طول ثانیوں کے رقاص کے طول کا صرف ایک چوتھائی ہوگا اور اس لیے لندن میں ۹، ۷۸ انچ۔

چونکہ ج کی قیمت زمین کی سطح پر نقطہ بہ نقطہ بدلتی ہے اس لیے ثانیوں کے رقاص کا طول بھی متغیر ہوگا۔ اگر ہم رقاص کا طول دیکھیں اور تیر وقت پیمائے اس کا دور معلوم کریں تو ہم اُس مقام پر جہاں تجربہ کیا جا رہا ہے ج کی قیمت محسوب کر سکتے ہیں، فی الحقیقت یہ طریقہ زمین کی سطح کے کسی نقطہ پر ج کی قیمت معلوم کرنے کے لیے سب سے زیادہ آسان اور صحیح ترین ہے۔

توضیح مثال

ایک رقاص نیویارک میں ثانیوں کو صحیح طور پر ضربوں کے ذریعہ ظاہر

کرتا ہے، اس کو فیلڈ لفیا لجانے پر معلوم ہوا کہ وہ وہاں ۲ شانے فی یوم تیز رہتا ہے۔ نیویارک اور فیلڈ لفیا پر ج کی قیمتوں کا مقابلہ کرو۔
فیلڈ لفیا میں رقا ص $22 \times (60)^2$ شانوں میں $22 \times (60)^2 + 2$ بار ضربیں ظاہر کرتا ہے۔ اس لیے ایک ضرب کا وقت

$$\frac{22 \times (60)^2}{22 \times (60)^2 + 2}$$

ہے اور یہ $\sqrt{\frac{1}{J}}$ کے مساوی ہے جہاں J رقا ص کا طول ہے اور ج فیلڈ لفیا میں جاذبہ کی قیمت ہے۔ اگر نیویارک میں جاذبہ کی قیمت ج سے تعبیر ہو تو

$$J = 1^2$$

$$\left[\frac{22 \times (60)^2 + 2}{22 \times (60)^2} \right] 1^2 = J$$

$$J = \left(\frac{22 \times (60)^2}{22 \times (60)^2} + 1 \right) 1^2 \text{ تقریباً}$$

$$J = J \left(\frac{22 \times (60)^2}{22 \times (60)^2} + 1 \right) \text{ اس لیے}$$

$$J = \left(\frac{1}{21600} + 1 \right) J \text{ تقریباً}$$

اس طرح نیویارک کی یہ نسبت فیلڈ لفیا میں جاذبہ تقریباً ۲۱۶۰۰ میں ایک حصہ زیادہ ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک رقا ص کا طول محسوب کرو جو ایک منٹ میں ۱۰۰ دفعہ ضربوں کے ذریعہ وقت کی پیمائش کرتا ہے۔

۲۔ ایک رفاص لندن میں تانیوں کو صحیح طور پر ضربوں سے ظاہر کرتا ہے اگر یہ رفاص نیویارک میں ہو تو اس سے صحیح وقت کی پیمائش ہوتی ہے اگر اس کے طول کو بقدر ایک ہزارویں حصہ کے چھوٹا کر دیا جائے۔ لندن اور نیویارک میں جاذبہ کی قیمتوں کا مقابلہ کرو۔

۳۔ زمین کی سطح پر عرض بلد لہ میں ایک نقطہ یرج کی قیمت

$\text{ج} = \text{ج}. (-1 - 0.25 - 0.5 - 0.75 - 1)$

ہے جہان ج. (= ۳۲۱۷) عرض بلد ۴۵° میں ج کی قیمت ہے۔ ثابت کرو کہ وہ عرض بلد جس میں معاومہ طول کا ایک چھوٹا سفر رقا ص گھڑی کی شرح میں بڑی بڑی خطا پیدا کرتا ہے عرض بلد ۴۵° ہے، اس عرض بلد میں خطا، فی میل معلوم کرو۔
(عرض بلد کا ایک دقیقہ = ۶۰.۷۵ فٹ)

۴۔ ایک عمارت میں زمین سے اوپر ف ارتفاع پر جاذبہ کی قیمت

ج - ۴۳ - ... ف

ہے جہاں ج. عمارت کے پائین پر جاذبہ کی قیمت ہے نیویارک میں ج. = ۱۲، ۳۲۔
رقاص گھڑی کی شرح میں وہ خطا معلوم کرو جو اس کو زمین سے ۳۰۰ فٹ بلند
عمارت کی چھت پر لیجانے سے پیدا ہوتی ہے۔

۵۔ ایک رقص کا طول l ہے اور وہ n ضربیں فی یوم ظاہر کرتا ہے۔
اگر اس طول کو $l + 1$ میں بدل دیا جائے تو ثابت کرو کہ رقص تقریباً

ن ل / ضربیں فی یوم کھو دیگا۔

۶۔ ایک غبارہ مستقل اسراع کے ساتھ بلند ہوتا ہے اور دو منٹ میں ۳۶۰۰ فٹ کے ارتفاع تک پہنچ جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس چڑھاؤ میں رقص گھڑی تقریباً ایک ثانیہ تیز ہو گئی ہوگی۔

۷۔ طول ل کے ایک رقاص کو اس کے لنگر کے صرف ایک چھوٹے حصہ کو حرکت دیکر ٹھیک بنایا جاسکتا ہے، اس حصہ کی کمیت کل لنگر کی کمیت کا $\frac{1}{n}$ ہے۔ اس کو کتنی دُور تک حرکت دینی چاہئے کہ ف ثانیئے فی یوم کی خطا کی

تصحیح ہو جائے۔

سادہ موسیقی حرکت

۲۰۸۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر کوئی رقا ص اس طور پر حرکت کرے کہ انتصابی کے ساتھ اس کا اعظم میلان چھوٹا ہو تو اس کی کل حرکت میں جو اسراع پیدا ہوتا ہے وہ اس کے راستہ کے وسطی نقطہ سے فاصلہ کے متناسب ہوتا ہے اور اسراع کی سمت اس نقطہ کی جانب ہوتی ہے۔ اگر کوئی نقطہ اس طریقہ پر حرکت کرے تو ہم کہتے ہیں کہ وہ سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کر رہا ہے۔ چنانچہ اگر ایک نقطہ سادہ موسیقی حرکت کرے اور ایک ثابت نقطہ سے اس کا فاصلہ s ہو تو شکل

$$\frac{f^2 s}{2} = k^2 s$$

کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جہاں k ایک مستقل ہے۔
تکمل کرنے سے حسب سابق (مقابلہ کرو مساوات (۹۶) کے ساتھ)
مساوات

$$v^2 = k^2 (s^2 - s_0^2)$$

حاصل ہوتی ہے اور پھر اس سے مساوات

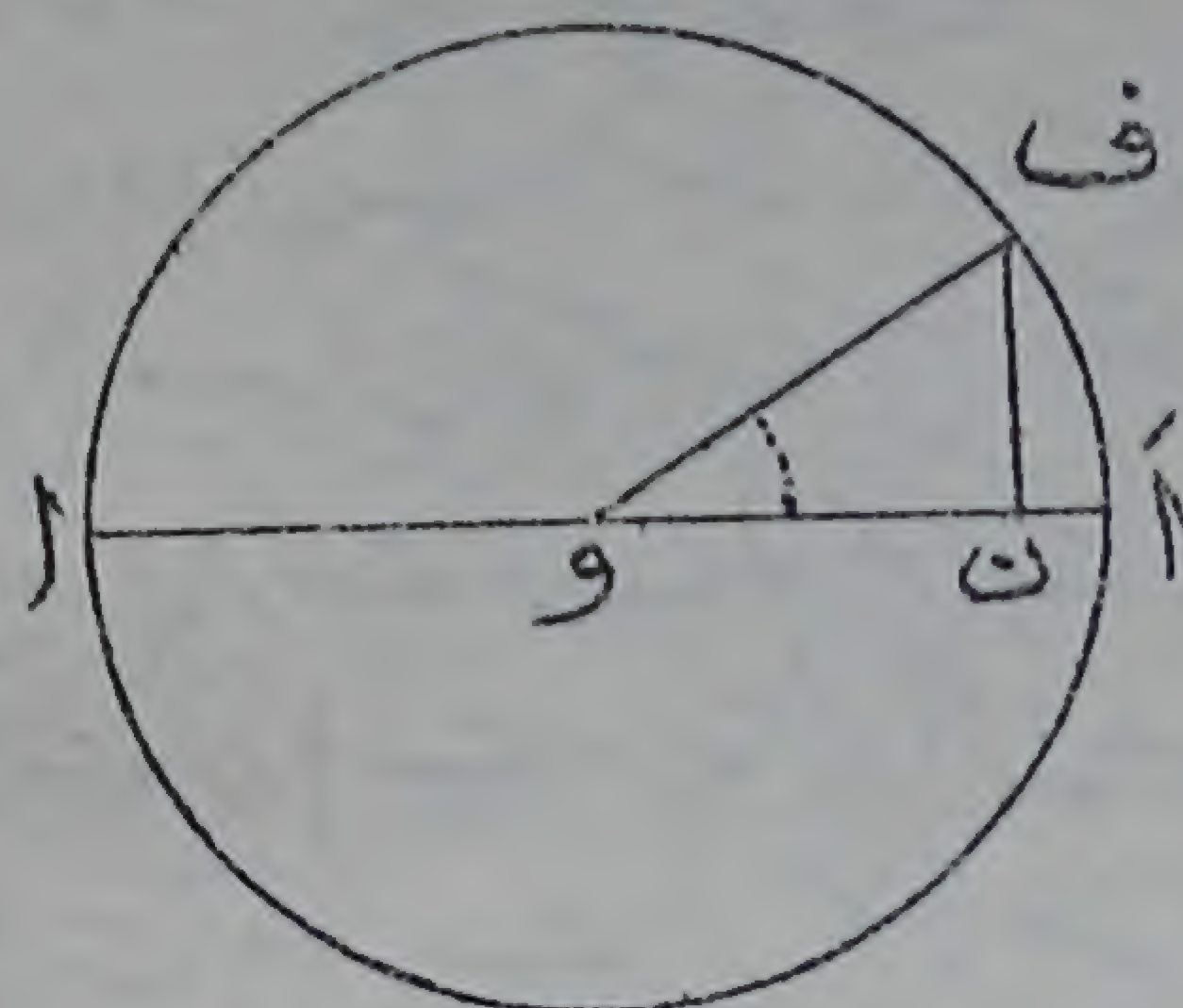
$$s = s_0 \cosh \left(\frac{kt}{s_0} \right) \quad (97)$$

ملتی ہے۔ مستقل k کو حرکت کا تعدد کہتے ہیں۔ مثلاً کسی سادہ

رقا ص کا تعدد $\frac{1}{2\pi}$ ہے۔

۲۰۹۔ سادہ موسیقی حرکت کی ایک آسان ہندسی توجیہ کیا جاسکتی ہے اور اس سے اس حرکت کا پورا علم ہماری احصاء یا تفرقی مساواتوں کے نظریہ کے استعمال کے بغیر ہو جاتا ہے۔ شکل ۱۳۱ میں فرض کرو کہ خط OF کے

گروہ یکساں زاویہ رفتار کے ساتھ گردش کرتا ہے اور اس لیے ف، یکساں رفتار کے ساتھ نصف قطر ۱ کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ فرض کرو کہ ف سے ایک ثابت قطر ۱ پر عمود ہن ن کھینچا گیا ہے۔ اب معلوم ہو گا کہ نقطہ ن خط ۱ پر سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ آگے اور پیچھے حرکت کرتا ہے۔



شکل (۱۳۱)

ف کا اسراع بموجب دفعۃً ف و کی سمت میں ک ۱ ہے۔ اس اسراع کو دو اسراعوں کا مرکب خیال کیا جاسکتا ہے (۱) ن کے لحاظ سے ف کا اسراع جس کو ن ف پر ہونا چاہئے (۲) و کے لحاظ سے ن کا اسراع جس کو و ن پر

ہونا چاہئے۔ پس ن کا اسراع، ف کے اسراع کا وہ جزو ترکیبی ہے جو سمت ۱ میں ہے۔ لیکن یہ جزو ترکیبی ک ۱ اجم طہ یا ک ۱ و ن ہے اور اس کی سمت ن و ہے۔ و ن کو س کے مساوی لینے سے اسراع ک ۱ اس اس سمت میں حاصل ہوتا ہے جس میں س کی پیمائش ہوئی ہے یعنی و ن۔ اس لئے نقطہ ن سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔

سادہ موسیقی حرکت کی اس ہندسی توجیہ سے و اور س کے لیے جملے راست حاصل کئے جاسکتے ہیں س کی قیمت و ن یا اجم طہ ہے۔ فرض کرو کہ ت = ص وہ لمحہ ہے جس پر نقطہ ف، دائرہ کے گرد اپنی حرکت میں نقطہ ۱ میں سے گزر رہا تھا، تب اس کے بعد کسی لمحہ ت پر وقت ت۔ ص ہو گا اور اس لیے و ف سے مرتسم شدہ زاویہ طہ = ک (ت۔ ص) ہو گا۔ اس لیے

$$س = و ن = اجم ک (ت۔ ص) \quad (۹۸)$$

یہ وہی نتیجہ ہے جو مساوات (۹۷) میں مندرج ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ حرکت کا محیط s وہی ہے جو دائرہ کا نصف قطر r ہے اور تعدد k زاویائی رفتار کے مثل ہے۔ مساوات (۹۸) کو تفرق کرنے سے رفتار کے لیے فوراً حاصل ہوتا ہے

$$v = \frac{f r s}{k} = k r \quad (ت - ص)$$

$$k = \frac{v}{r} \quad (س - ۲)$$

اس نتیجہ کو اس طریقہ پر بھی حاصل کیا جاسکتا ہے کہ متحرک نقطہ P کی رفتار k کو A کی سمت میں اور اس کے علی التوا k سمت میں تحلیل کیا جائے۔ اول الذکر سرکٹ A پر n کی رفتار ہے اور اس کی مقدار k جب طہ یا

$$v = k r \quad (ت - ص)$$

$$k = \frac{v}{r} \quad (س - ۲)$$

حسب سابق فوراً حاصل ہوتی ہے۔ اس حرکت میں سادہ رفاص کی حرکت کی طرح مقدار k کو محیط کہتے ہیں اور وقت $\frac{2\pi}{k}$ کو جس کے بعد حرکت خود تکرار پاتی ہے دور کہتے ہیں۔

مثالیں

۱۔ ایک ذرہ 12×10^{-10} مائیکروں کے دور کی سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کرتا ہے اور 5 فٹ کا محیط رکھتا ہے۔ اس کی اعظم رفتار معلوم کرو اور یہ اعظم رفتار جس لمحہ واقع ہوتی ہے اس کے ایک ثانیہ بعد ذرہ کا محل اور اس کی رفتار معلوم کرو۔

۲۔ ایک ذرہ جو دور ت کی سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کر رہا ہے اپنے اوسط محل سے فاصلہ ۱ پر رفتار و رکھتا ہے۔ اس کا محیط معلوم کرو۔

۳۔ ایک ذرہ ایک خط ۱ ب پر حرکت کرنے میں آزاد ہے۔ اس پر ایک قوت جاذبہ عمل کرتی ہے جو ۱ ب کے ایک نقطہ ف سے اس کے فاصلے کے متناسب ہے اور اس لیے ذرہ سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی اوسط توانائی بالحرکت اس کی اوسط توانائی بالقوت کے مساوی ہے۔

۴۔ ایک ذرہ سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کر رہا ہے اور اس کے اوسط محل سے فاصلوں ۴ اور ۳ فٹ پر اس کی رفتاریں علی الترتیب ۱۳ اور ۴ فٹ فی ثانیہ ہیں۔ اس کا محیط اور دور معلوم کرو۔

۵۔ ایک ذرہ ایک فریم کے لحاظ سے سادہ موسیقی حرکت رکھتا ہے اور خود فریم بھی ایک دوسرے فریم کے لحاظ سے سادہ موسیقی حرکت رکھتا ہے ان دو حرکتوں کی سمتیں متوازی ہیں اور ان کے دور ایک ہی ہیں۔ ثابت کرو کہ دوسرے فریم کے لحاظ سے متحرک نقطہ کی حرکت سادہ موسیقی حرکت ہے جس کی سمت اور دور وہی ہیں جو فریم کی حرکت کے ہیں۔

۶۔ طبعی طول ل اور مقیاس لہ کی ایک لچکدار دوری سے ایک وزن و باندھا گیا ہے اور اس کو توازن کی حالت میں انتصاباً لٹکنے چھوڑ دیا گیا ہے۔ اب وزن کو انتصاباً نیچے مزید فاصلہ ف تک کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وزن کو آزاد چھوڑ دینے پر وہ محیط ف کی سادہ موسیقی حرکت رکھیگا بشرطیکہ اس میں دوری کی غیرتی ہوئی حالت کبھی بھی وقوع پذیر نہ ہو۔ حرکت کا دور معلوم کرو۔

مددیری رقا ص

۲۱۰۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک سادہ رقا ص کی حرکت صرف اس وقت تک سادہ موسیقی حرکت رہتی ہے جب تک کہ حرکت کا

حیطہ چھوڑا رہتا ہے۔ لیکن جاذبہ کے تحت ذرہ کی حرکت کو اس طریقہ سے
مقید کرنا ممکن ہے کہ اس کی حرکت سادہ موسیقی حرکت ہو وراں حالیکہ حیطہ
خواہ کتنا ہی بڑا ہو۔

خواہ کتنا ہی بڑا ہو۔
وہ منحنی معلوم کرنے کے لیے جس میں ذرہ کی حرکت کو مقید کرنا پڑتا
ہے فرض کرو کہ ہم مساوات (۹۴) یعنی

$$\frac{\text{فراس}}{\text{فرت}^2} = - \text{ج جب طه}$$

فرت ۲
پر عود کرتے ہیں جو ایک ایسے ذرہ کی حرکت کی مساوات ہے جو کسی منحنی
میں حرکت کرنے پر مجبور ہے اور طہ وہ زاویہ ہے جو منحنی کے اس نقطہ پر کمان
افقی کے ساتھ بناتا ہے جس کا فاصلہ منحنی پر اس ہے۔ یہ مساوات سادہ موسیقی حرکت

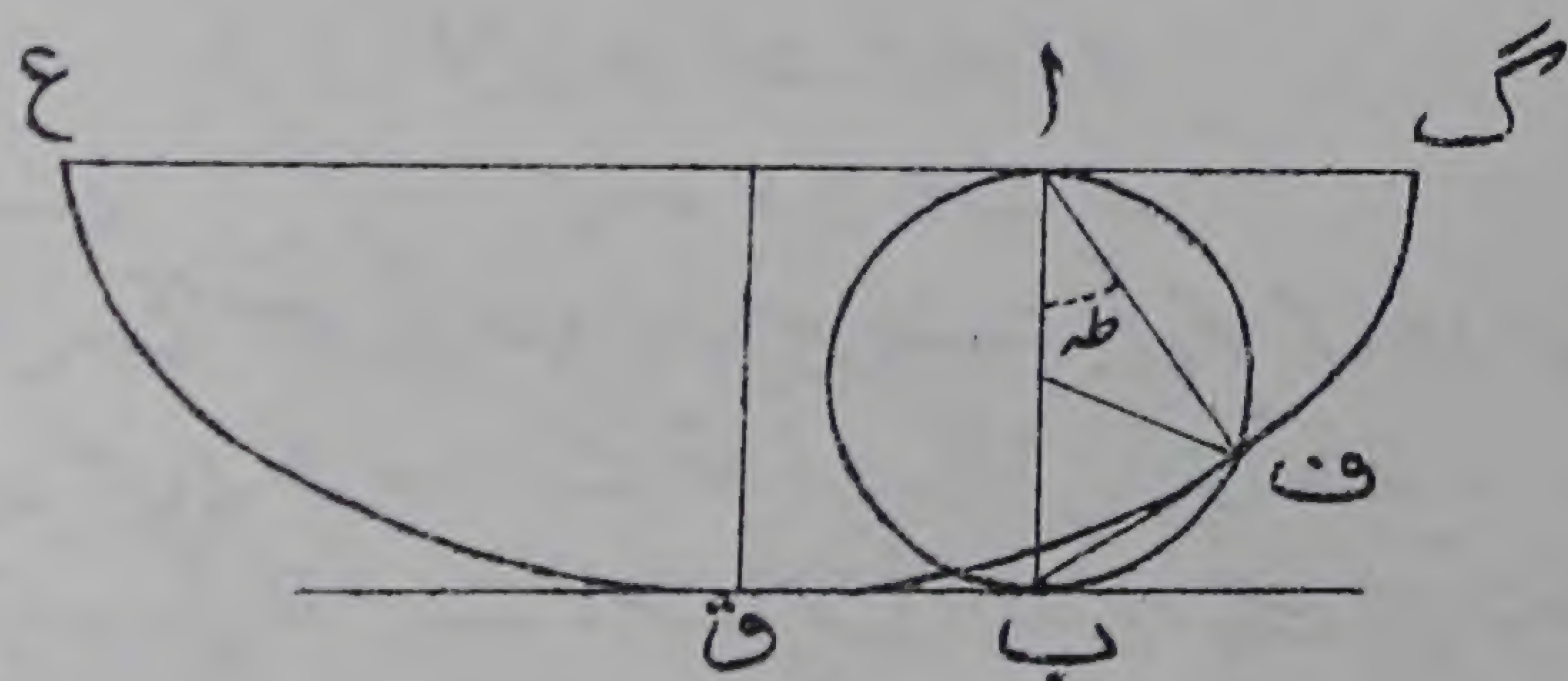
کو تعبیر کرے گی اگر اسراع $\frac{\text{فر}^2 \text{س}}{\text{فر}^2 \text{ت}}$ ، یک س^2 کے مساوی ہو۔ اس لیے

ج جب ط = ک^۲ س

اور اس لیے جب طہ، س کے متناسب ہونا چاہئے۔

۲۱۱۔ اس ربط سے خط تدویر کی ایک خاصیت معلوم ہوتی ہے یعنی

اُس منحنی کی جس کو ایک دائرہ کے محیط پر کا ایک نقطہ فضا میں مرسم کرتا ہے جبکہ دائرہ
ایک خط مستقیم پر لڑھک رہا ہو شکل (۱۳۲) میں فرض کرو کہ ایک خط تدویر پر جو خط
ع گ پر ایک دائرہ کے لڑھکنے سے بنا ہے ف کوئی نقطہ ہے۔



شکل (۱۳۲)

جب متحرک دائرہ کے محیط پر کا نقطہ 'ف' پر ہو تو فرض کرو کہ دائرہ کا وہ نقطہ جو خط 'ع' گ' کو مس کرتا ہے 'ا' ہے اور فرض کرو کہ 'ا' میں سے گذرنیوالا قطر 'اب' ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ زیر بحث لمحہ پر دائرہ کے محیط پر کے نقطہ 'ف' کی حرکت خط 'اف' پر عمود وار ہے (دیکھو مثال ۱ صفحہ ۱۳)۔ چونکہ 'اف' قائمہ زاویہ ہے اس لیے یہ حرکت 'ب' 'ف' پر ہونی چاہئے۔ اس لیے 'ب' 'ف' خط تدویر کا مماس ہے۔ اگر 'ع' گ' کو افقی فرض کیا جائے تو 'ف' پر کے مماس اور افقی کے درمیان زاویہ طہ زاویہ 'ف' 'اب' کے مساوی ہے اور اس لیے 'ف' میں سے

گذرنیوالا دائرہ کا نصف قطر انتصابی کے ساتھ زاویہ ۲ طہ بنائے گا۔ (۲۶۷)
فرض کرو کہ دائرہ 'ع' گ' پر لڑھکتا ہے تا آنکہ 'ف' پر خط تدویر کا مماس افقی کے ساتھ زاویہ طہ + فرطہ بنائے۔ اب 'ف' پر کے نصف قطر کو انتصابی کے ساتھ زاویہ ۲ (طہ + فرطہ) بنانا چاہئے اور اس لیے دائرہ زاویہ ۲ فرطہ میں سے گردش کر چکا ہوگا۔ اب چونکہ 'ف' کی حرکت کو 'ا' کے گرد گردش کی حرکت سمجھا جاسکتا ہے اس لئے راستہ کا وہ چھوٹا عنصر فرس جو 'ف' سے مرسم ہوتا ہے

$$\text{فرس} = \text{اف} \times ۲ \text{ فرطہ}$$

سے حاصل ہوگا۔

اب 'اف' = 'اب' جم طہ = 'د' جم طہ جہاں 'د' دائرہ کا قطر ہے۔
اس طرح

$$\text{فرس} = ۲ \text{ جم طہ فرطہ}$$

$$\text{س} = ۲ \text{ جم طہ}$$

اور تکمیل کرنے پر تکمیل کے مستقل کی ضرورت نہیں ہے اگر ہم 'س' کو اس نقطہ سے پیمائش کریں جس پر طہ = . یعنی خط تدویر کا زیر ترین نقطہ۔

خط تدویر کی خاصیت ثابت ہو چکی اور ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (۹۹) ایک نقطہ کی کل حرکت میں درست رہتی ہے جبکہ یہ نقطہ ایک خط تدویر

مرسم کرتا ہے جس کی تکوین قطر د کے ایک دائرہ کے لڑھکنے سے ہوتی ہے جہاں

$$\frac{ج}{س} = ۵۲$$

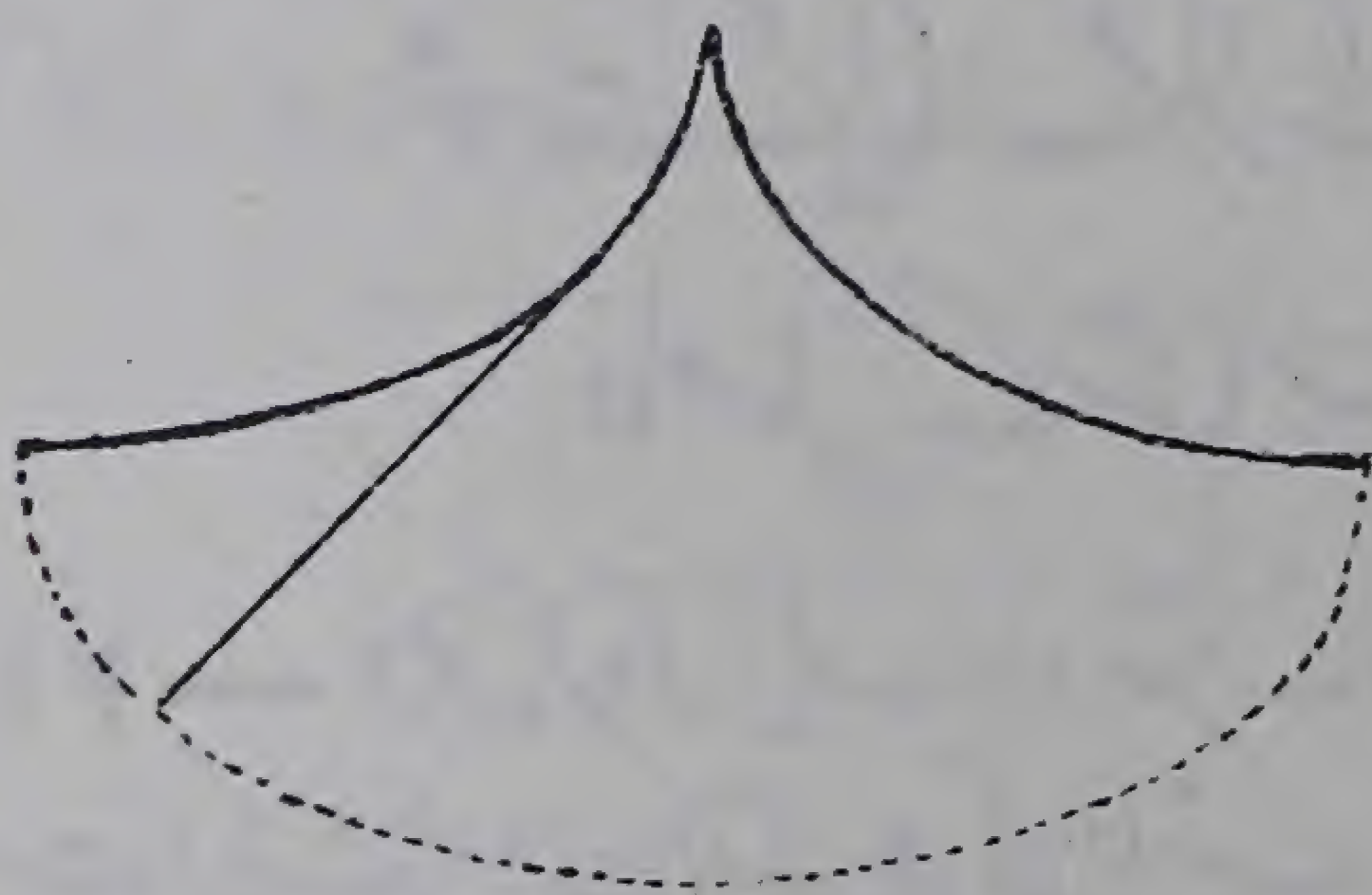
۲۱۲۔ اگر خط تدویر دیا گیا ہو تو سادہ موسیقی حرکت کا قطر د

ک، $\sqrt{\frac{ج}{۵۲}}$ کے مساوی ہوگا اور دور $\frac{\pi^۲}{س}$ ہے یعنی

$$\sqrt{\frac{۵۲}{ج}} \pi^۲$$

اس لیے حرکت کا دور وہی ہے جو طول ۵۲ کے سادہ رقاص کا ہوتا ہے

۲۱۳۔ تدویری حرکت کی اہمیت حسب ذیل ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک سادہ رقاص کی حرکت صرف اس وقت سادہ موسیقی حرکت ہوتی ہے (۲۶۸) جبکہ حیثہ اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کو صغیر سمجھا جاسکے۔ محدود حیثوں کے لئے حرکت سادہ موسیقی نہیں ہوتی اور اس لیے دور اس سادہ موسیقی حرکت کے دور سے مختلف ہوتا ہے جو حیثہ کے بہت چھوٹا ہونے سے حاصل ہوتا ہے۔ پس دور حیثہ پر منحصر ہوتا ہے، چنانچہ کوئی گھڑی جو صحیح ثانیوں کا ضربوں کے ذریعہ اظہار کرتی ہے جبکہ رقاص ایک زاویہ میں سے جھولے تیر یا سست ہوگی جبکہ رقاص کسی مختلف زاویے میں سے جھولنے لگے۔ حیثہ کے تغیرات کسی رقاص کی حرکت کی اثناء میں ہمیشہ وقوع پذیر ہونے چاہئیں اور انہی وجہ سے گھڑی کی وقت خالی میں بے قاعدگیاں پیدا ہوتی ہیں۔



شکل (۱۳۳)

لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر ایک ذرہ ایک خط تدویر مرسم کرے تو دور حیثہ پر منحصر نہیں ہوتا اور اس لیے حیثہ کے تغیرات کسی ایسے ذرہ کی وقت خالی کو متاثر نہیں کر سکتے۔

ذرہ کو ایک خط تدویر میں حرکت کرنے کے لیے مقید کرنے کا سادہ ترین طریقہ عملاً یہ ہے کہ اس کو ایک ثابت نقطہ سے ایک دوری کے ذریعہ اس طریقہ پر لٹکایا جاتا ہے کہ ذرہ کی حرکت میں دوری دو انتصابی رُخوں پر خود لپکتی اور کھلتی جاتی ہے۔ اگر ان رُخوں کے منحنی کو ٹھیک طور پر منتخب کیا جائے تو ذرہ ایک خط تدویر مرتسم کرے گا اور یہ آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ان رُخوں کے منحنی دو تدویروں کے حصے ہونے چاہئیں جن میں سے ہر ایک اس تدویر کے مساوی ہو جس کو ذرہ مرتسم کرتا ہے۔

مثالیں

۱۔ تدویری حرکت میں ثابت کرو کہ ذرہ کی رفتار کا انتصابی جزو ترکیبی بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ وہ اپنے انتصابی آثار کا نصف طے کر چکے۔

۲۔ ایک ذرہ جاذبہ کے تحت ایک خط تدویر میں اہتزاز کرتا ہے، حرکت کا محیط ب اور دور تہ ہے۔ ثابت کرو کہ سکون کے محل سے پیمائش شدہ وقت t پر اس کی رفتار $\frac{2\pi b}{t}$ جب $\frac{2\pi t}{t}$ ہوگی۔

۳۔ کیمت ک کا ایک ذرہ ایک چکنے خط تدویر پر اس کے قرن سے پھسلنا شروع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر دباؤ k ج جم پہ ہے جہاں پہ ذرہ کی حرکت کی سمت کا میلان انفعی کے ساتھ ہے۔

قوت کے ایک مرکز کے گرد ذرہ کی حرکت

(۲۶۹)

فاصلہ کے متناسب قوت

۲۱۴۔ فرض کرو کہ ایک ذرہ صرف ایک تجاذبی قوت کے تحت جس کی سمت ایک ثابت نقطہ کی جانب ہے اور جو اس کے فاصلے کے متناسب ہے حرکت کرتا ہے اور کوئی دوسری قوتیں ذرہ پر عمل نہیں کرتیں۔

و کو مبداء لو اور فرض کرو کہ کسی لمحہ پر ذرہ کے محل ف کے محدود
لا، ما، ی ہیں۔ فرض کرو کہ ذرہ پر عمل کرنے والی قوت مہ x و ف ہے
جس کی سمت و ہے اور مہ ایک مستقل ہے۔ اس قوت کے اجزائے
ترکیبی محدودوں کے محوروں کے متوازی

۔ مہ لا، ۔ مہ ما، ۔ مہ ی

ہیں اور اسراع کے اجزائے ترکیبی حسب دفعہ

$$\frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فرت}^2}, \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فرت}^2}, \frac{\text{فر}^2 \text{ی}}{\text{فرت}^2}$$

ہیں۔ پس ذرہ کی حرکت کی مساواتیں حسب ذیل ہوتی ہیں:

(۱۰۰) ک $\frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{مہ لا}$

(۱۰۱) ک $\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فرت}^2} = \text{مہ ما}$

(۱۰۲) ک $\frac{\text{فر}^2 \text{ی}}{\text{فرت}^2} = \text{مہ ی}$

یہ تین مساواتیں ایک ہی نمونے کی ہیں یعنی اس نمونے کی
جو سادہ موسیقی حرکت کو تعبیر کرتا ہے۔ اس لیے اس عمود کا پائین جو متحرک
ذرہ سے محدودوں کے محوروں میں سے کسی ایک پر کھینچا گیا ہو سادہ موسیقی
حرکت کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ مساوات (۱۰۰) کا حل

$$\text{لا} = \text{ا.جم ف (ت۔صہ)}$$

ہے جہاں ف^۲ = $\frac{\text{مہ}}{\text{ک}}$ ۔ اس کو لکھا جاسکتا ہے

$$\text{لا} = \text{ا.جم ف صہ جم ف ت} + \text{ا.جم ف صہ جب ف ت}$$

$$\text{یا} \quad \text{لا} = \text{ا.جم ف ت} + \text{ا.جم ف ت}$$

(۲۷۰) جہاں ج اور د نئے مستقل ہیں جو (ج م ف صہ اور ا ج ب ف صہ) کی جگہ رکھے گئے ہیں۔ دوسری دو مساواتوں کے حل اسی کے مشابہ ہیں اور اس لیے مکمل حل حسب ذیل ہے:

$$(۱۰۳) \quad لا = ج + ج م ف ت + د ج ب ف ت$$

$$(۱۰۴) \quad ما = ج + ج م ف ت + د ج ب ف ت$$

$$(۱۰۵) \quad ی = ج + ج م ف ت + د ج ب ف ت$$

ہم ہمیشہ مساواتوں

$$(۱۰۶) \quad ج + ر ج + س ج = ۰$$

$$(۱۰۷) \quad د + ر د + س د = ۰$$

کو حل کر سکتے ہیں اور ر اور س کی ایسی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں جو ان مساواتوں کو پورا کرتی ہیں۔ فرض کرو کہ ہم مساواتوں (۱۰۴) اور (۱۰۵) کو ر اور س کی ان قیمتوں سے ضرب دیتے ہیں اور متناظر طرفوں کو مساوات (۱۰۳) کی متناظر طرفوں میں جمع کرتے ہیں۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$(لا + ر ما + س ی) = (ج + ر ج + س ج) + (ج م ف ت + د ج ب ف ت)$$

$$+ (د + ر د + س د) ج ب ف ت = ۰$$

(۱۰۸)

کیونکہ مساواتیں (۱۰۶) اور (۱۰۷) پوری ہوتی ہیں۔ مساوات (۱۰۸) کے یہ معنی ہیں کہ ت کی تمام قیمتوں کے لیے ربط لا + ر ما + س ی = ۰ درست ہے اور اس لیے ذرہ کی پوری حرکت میں وہ اُس مستوی میں رہتا ہے جس کی یہ مساوات ہے۔

محدودوں کے محور اختیار کی طور پر منتخب ہوئے ہیں۔ ہم ہمیشہ ان محوروں کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ وہ مستوی جس میں پوری حرکت وقوع پذیر ہوتی ہے لا ما کا مستوی ہو۔ تب حرکت حسب ذیل دو مساواتوں سے معلوم ہوگی:

$$لا = ج + ج م ف ت + د ج ب ف ت$$

ما = ججم ف ت + د جب ف ت
ان مساواتوں کو جب ف ت اور ججم ف ت کے لیے حل کرنے سے

$$\begin{array}{r} \text{ج لا} - \text{ج ما} \\ \hline \text{ج د} - \text{ج د} \\ \hline \text{د لا} - \text{د ما} \\ \hline \text{ج د} - \text{ج د} \end{array} = \text{جب ف ت}$$

$$\begin{array}{r} \text{ج د} - \text{ج د} \\ \hline \text{د لا} - \text{د ما} \\ \hline \text{ج د} - \text{ج د} \end{array} = \text{ججم ف ت}$$

اس لئے مربع لینے اور جمع کرنے سے

(۲۷۱)

$$(\text{ج لا} - \text{ج ما}) + (\text{د لا} - \text{د ما}) = (\text{ج د} - \text{ج د})^2$$

یہ قطع ناقص کی مساوات ہے۔

اس لئے وہ عام ترین حرکت جو ذرہ کے لیے ممکن ہے ایک
قطع ناقص کو بار بار مرستہ کرنے پر مشتمل ہوتی ہے۔ اس حرکت کا دور

۲۲ ہے اور یہ وہ وقت ہے جو ججم ف ت اور جب ف ت کو

اپنی قیمتیں دہرانے کے لیے مطلوب ہوتا ہے۔
۲۱۵ — محاور لا، ما اب تک غیر متغیر ہیں۔ فرض کرو کہ ہم انہیں قطع
ناقص کے صدر محاور خیال کرتے ہیں۔

اب اگر ہم فرض کریں کہ وقت کی پیمائش اس لمحہ سے کی گئی ہے
جس پر ذرہ محور اعظم کے سروں میں سے ایک پر تھا تو ہمیں شکل
ذیل کی مساواتیں حاصل ہوں گی :-

$$\text{لا} = \text{ججم ف ت}$$

$$\text{ما} = \text{جب ف ت}$$

اس طرح ذرہ جس قطع ناقص کو مرستہ کرتا ہے اس کا خارج المکرز

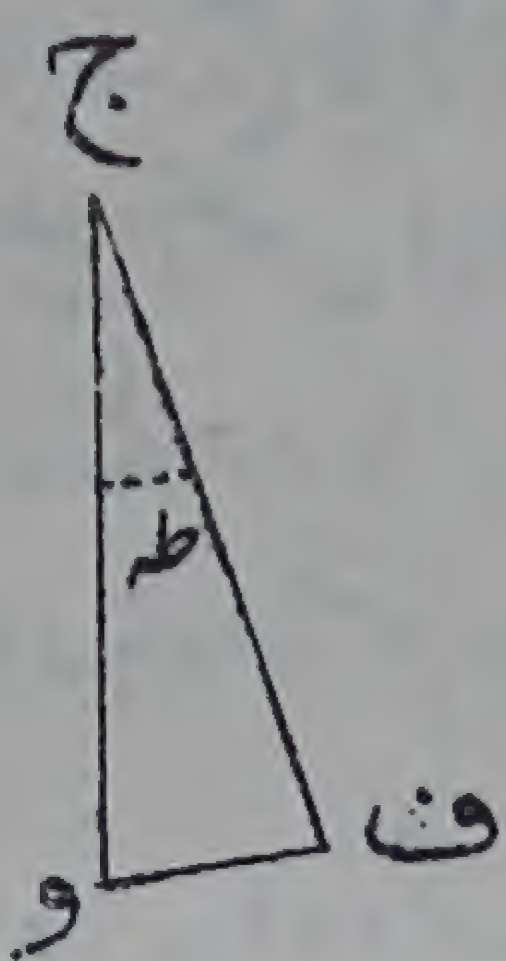
زاویہ ف ت ہے اور اس لیے یہ زاویہ یکساں زاویہ رقتارف یا

کے ساتھ بڑھتا ہے۔ حرکت تکرار پاتی ہے جب 'ف' ۲۲ تک بڑھ جاتا ہے

اس لئے تعدد ف یا $\frac{1}{\pi}$ ہے اور دور π $\frac{1}{\pi}$ ہے۔

۲۱۶۔ اس حرکت کی مثال اس رقاص کی حرکت سے مل سکتی ہے جو ایک انتصابی مستوی میں حرکت کرنے پر مجبور نہ ہو لیکن انتصابی سے اس کے انحراف چھوٹے ہوں۔

فرض کرو کہ رقاص کا طول ۱ ہے اور فرض کرو کہ اس کا لنگر اپنے توازن کے محل و سے قریب کے محل ف تک ہٹا ہے اتنا کہ زاویہ ف ج و کو چھوٹا سمجھا جاسکتا ہے۔



اس زاویہ کو طہ سے تعبیر کرو تو لنگر کے وزن کو دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے (۱) ک ج جم طہ سمت ج ف میں

(۲) ک ج جب طہ سمت ف و میں۔ (۱) کی تعدیل دوری کے تناؤ سے ٹھیک طور پر ہو جاتی ہے۔ پس

شکل (۱۳۴)

(۲) میں اگر طہ چھوٹا ہے تو جب طہ کو طہ کے مساوی اور اس لیے $\frac{1}{\pi}$ کے مساوی رکھا جاسکتا ہے۔ اس لیے لنگر پر ایک قوت ک ج و ف

سمت و ف میں عمل کرتی ہوئی فرض کی جاسکتی ہے۔ اس لیے حرکت اس قسم کی ہے جس کو اوپر بیان کیا گیا ہے، مہ کی قیمت ک ج

ہے اور اس لئے ف کی قیمت $\frac{1}{\pi}$ ہے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں

کہ اگر کسی لٹکے ہوئے وزن کو اس کے توازن کے محل سے ہٹا کر کسی طریقہ پر بھینکا جائے تو وہ ہمیشہ اس افقی مستوی میں ایک قطع ناقص مرتسم کرے گا جس میں وہ حرکت کرنے میں آزاد ہے اور وہ نقطہ اس

(۲۷۲)

قطع ناقص کا مرکز ہوگا جو اس نقطہ کے عین نیچے ہے جس سے وزن لٹکایا گیا۔ انگلستان کے دیہاتی میلوں میں بعض اوقات ایک ایسا انتظام دیکھا جاسکتا ہے جس میں تماشہ گر بڑی ہوشیاری سے اس نتیجہ سے فائدہ اٹھاتا ہے۔ ایک وزن ایک دوری سے لٹکا ہوا ہوتا ہے اور فرش پر ٹھیک اس نقطہ کے نیچے جس سے وزن لٹکا ہوا ہے ایک اسکیٹل (لکڑی کی چھوٹی مینج) رکھی ہوتی ہے۔ تماشہ گر تماشہ بینوں سے کہتا ہے: "آؤ، داخلہ کی فیس دیکر اندر آؤ اور انعام کیلئے ایک مقابلہ میں شریک ہو جو اس شخص کو دیا جائے گا جو وزن کو اس طریقہ سے پھینکے کہ وہ واپس ہوتے ہوئے اسکیٹل سے ٹکرائے۔ بلاشبہ یہ مسئلہ اتنا ہی ناممکن ہے جتنا ایک ایسے قطع ناقص کو بنانے کا ہے جو خود اپنے مرکز میں سے گذرتا ہو۔

۲۱۷۔ ایک اور طریقہ جس کے ذریعہ متذکرہ بالا حرکت کی مثال مل سکتی ہے حسب ذیل ہے: طبعی طول l کی ایک پلکدار دوری کے ایک سرے سے ایک چھوٹا ذرہ بندھا ہوتا ہے اور یہ ذرہ ایک چلنی افقی میز پر حرکت کرنے میں آزاد رہتا ہے۔ دوری کا دوسرا سر امینر کے ایک چھوٹے سوراخ میں سے گذرتا ہے اور ایک ثابت نقطے سے جس کا فاصلہ سوراخ سے l ہے بندھا ہوتا ہے۔ اگر ذرہ کو سوراخ سے فاصلہ r تک کھینچا جائے تو دوری کا کل طول $l + r$ ہوگا اور اس لیے اس کا تناؤ $\frac{r}{l}$ ہوگا جہاں l پلک کا مقیاس ہے۔ اس لیے ذرہ پر عمل کرنے والی قوت یعنی دوری کا تناؤ اس فاصلے کے متناسب ہے جو ذرہ کا ایک ثابت نقطہ یعنی سوراخ سے ہے اور اس قوت کی سمت سوراخ کی جانب ہے۔ اس کو چھوڑ دینے پر ذرہ میز پر ایک قطع ناقص میں حرکت کرے گا۔

مثالیں

۱۔ نقطہ F ایک قطع ناقص کو ایک تجاذبی قوت کے تحت جس کی

سمت مرکز کی جانب ہے مرسم کر رہا ہے اور امدادی دائرہ پر متناظر نقطہ ف ہے۔
ثابت کرو کہ ف اس امدادی دائرہ کے گرد یکساں رفتار سے حرکت کرتا ہے۔
۲۔ ایک ذرہ قوت کے ایک مرکز کے گرد ایک قطع ناقص مرسم کرتا ہے
کشش راست فاصلے کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ قطع ناقص کے مرکز سے
ذرہ تک جو سمتی نصف قطر کھینچا جائے وہ مساوی اوقات میں مساوی رقبے
مرسم کرتا ہے۔

۳۔ ایک ذرہ ایک قوت کے تحت جو فاصلے کے متناسب ہے ایک قطع
ناقص مرسم کر رہا ہے اس پر ناقص کے محور اعظم کی متوازی سمت میں ایک
دھکے پڑتا ہے۔ ثابت کرو کہ نئے مدار کا محور اصغر وہی ہے جو پرانے مدار کا تھا
اور بتاؤ کہ محور اعظم میں پیدا شدہ تبدیلی کس طرح معلوم کی جاسکتی ہے۔
۴۔ ایک ذرہ قوت کے متعدد مرکوزوں کی کششوں کے زیر عمل ہے جن میں
سے ہر کشش فاصلے کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ ایک قطع ناقص مرسم
کرتا ہے۔

(۲۷۳)

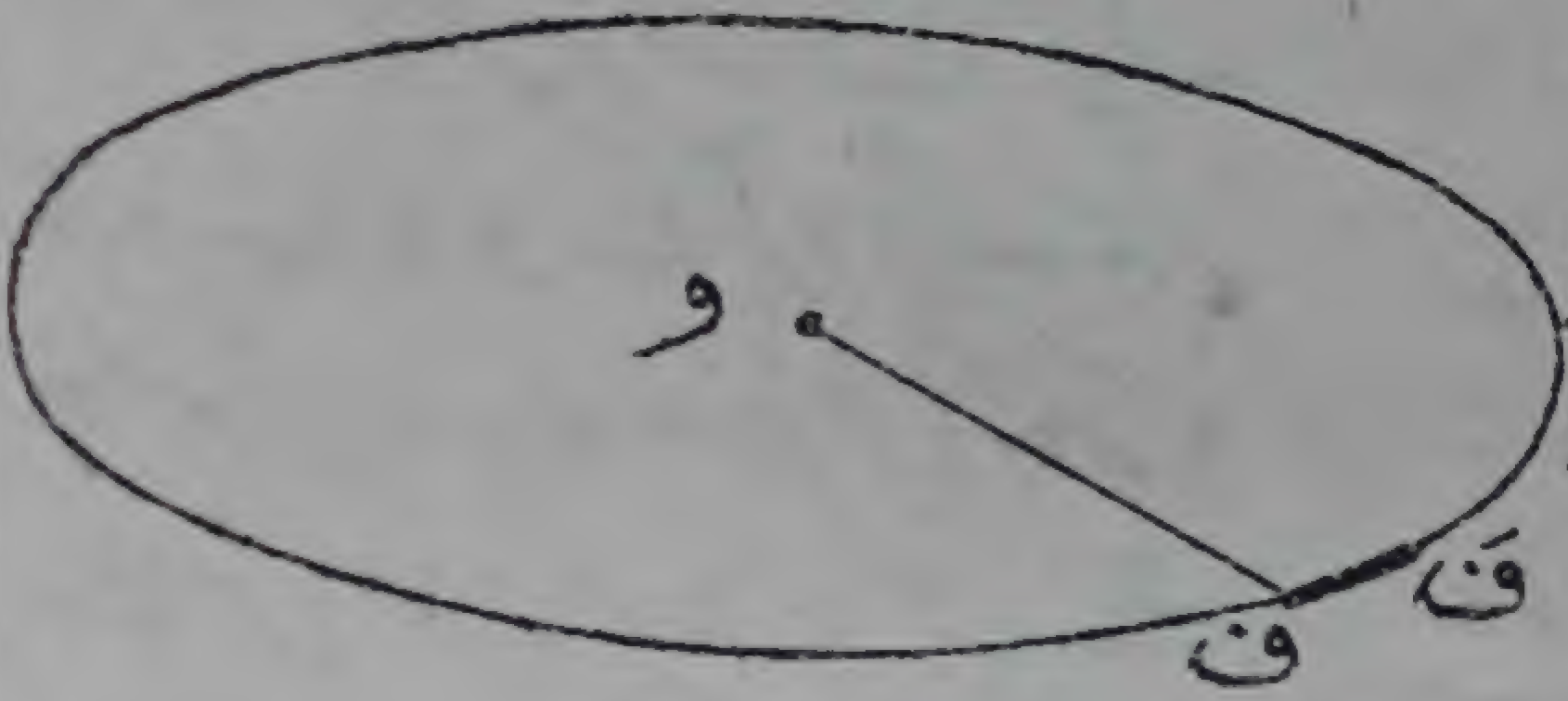
اس حرکت کی تمثیل کے لیے میکانیکی نمونہ کس طرح بنایا جاسکتا ہے۔
۵۔ ایک ذرہ ایک دفاعی قوت کے زیر عمل ہے جو قوت کے مرکز سے
اس کے فاصلے کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ ایک قطع ناقص مرسم کرتا ہے۔
۶۔ مثال مابقی میں ثابت کرو کہ ذرہ اور قوت کے مرکز کو ملائے والا
سمتی نیم قطر مساوی اوقات میں مساوی رقبے مرسم کرتا ہے۔

قوت کے ایک مرکز کے گرد حرکت کا عام نظریہ

۲۱۸۔ فرض کرو کہ ایک ذرہ ہے جس پر صرف ایک قوت عمل
کرتی ہے جس کی سمت قوت کے ایک ثابت مرکز کی جانب ہے اور
اس قوت کی مقدار اس فاصلہ کا کوئی تفاعل ہے جو ذرہ کا ثابت مرکز
سے ہے۔

فرض کرو کہ قوت کا مرکز و ہے اور کسی لمحہ پر ذرہ کا محل ف ہے

اور اس لمحہ پر ذرہ کی رفتار کی سمت F ہے۔ اب مستوی WF میں ذرہ کی رفتار اور نیز اس کا اسراع واقع ہیں، رفتار F پر اور اسراع F پر ہے۔ پس کسی چھوٹے وقفہ کے بعد ذرہ کی رفتار پھر بھی مستوی WF میں ہوگی۔ نیز ذرہ بھی اسی مستوی میں ہوگا (فرض کرو نقطہ F پر) اور اس لیے اسراع بھی جو F پر ہے اسی مستوی میں ہوگا۔



شکل (۱۳۵)

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ایک اور چھوٹے وقفہ کے بعد ذرہ کا محل، رفتار، اور اسراع سب کے سب مستوی WF میں ہوں گے اور علیٰ ہذا اس عمل کو جہاں تک چاہیں جاری رکھا جاسکتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ذرہ مستوی WF کو کبھی بھی نہیں چھوڑے گا اور اس لئے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

وہ مدار جس کو ایک ذرہ قوت کے ایک ثابت مرکز کے

گردم تقسم کرتا ہے کلاً ایک مستوی میں واقع ہوتا ہے۔

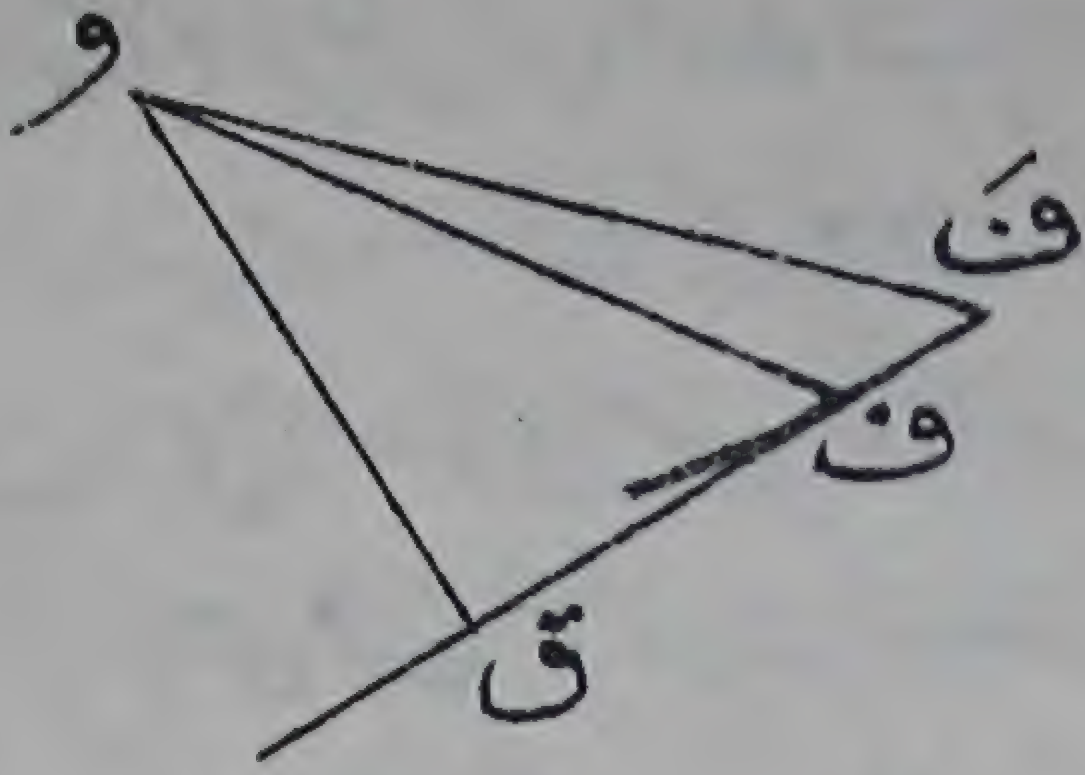
دفعہ ۱۱۲ میں اس مسئلہ کی ایک تمثیل دی جا چکی ہے، یہ تمثیل اس مدار سے متعلق ہے جس کو ذرہ ایسی کشش کے تحت تقسم کرتا ہے جو مرکز سے فاصلہ کے متناسب ہے۔

رفتار کا معیار

(۲۷۲)

۲۱۹۔ کسی نقطہ کی رفتار ایک سمتی ہے اور اس سمتی کے خط عمل کو وہ خط سمجھا جاسکتا ہے جو متحرک نقطہ میں سے اس کی رفتار کی سمت میں کھینچا گیا ہو۔ ہم رفتار کے معیار کی عین اسی طریقہ پر تعریف کر سکتے ہیں جس طریقہ پر قوت کے معیار کی تعریف کی جا چکی ہے۔ مزید بریں قوت کے

معیاروں کے تمام خواص اس واقعہ سے مستنبط کئے گئے تھے کہ قوتوں کو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کیا جاسکتا ہے اور اس لیے وہی خواص رفتاروں کے معیاروں کے لیے بھی درست ہوں گے کیونکہ رفتاروں کو بھی قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کیا جاسکتا ہے۔



شکل (۱۳۶)

فرض کرو کہ $ف$ ایک ذرہ ہے جو $و$ کے گرد ایک مدار مرتشم کر رہا ہے اور فرض کرو کہ $و$ سے اس خط پر جو $ف$ میں سے گذرتا ہے اور ذرہ کی رفتار کی سمت میں کھینچا گیا ہے عمود $وق$ نکالا گیا ہے۔ پس ذرہ کی رفتار

معیار $و$ کے گرد $وق \times$ (ذرہ کی رفتار) ہے۔

فرض کرو کہ وقت کے چھوٹے وقفہ $ف$ کے بعد ذرہ $ف$ پر ہے۔ $ف$ پر اس کی رفتار $ف$ پر اس کی رفتار اور $ف$ پر اس کے اسراع کے فرت گنا سے مرکب ہے۔ اس لیے

($ف$ پر رفتار کا معیار $و$ کے گرد)

$=$ ($ف$ پر رفتار کا معیار $و$ کے گرد)

$+ [(فرت \times ف) کا اسراع] کا معیار $و$ کے گرد]$

$ف$ پر اسراع کی سمت $ف$ ہے اور اس لیے اس مساوات کی آخری رقم صفر ہے اور اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ $ف$ اور $ف$ پر کی رفتار کے معیار $و$ کے گرد مساوی ہیں۔

ہم اس کی توضیح پچھلے مسئلہ کی طرح نقطہ بہ نقطہ کر سکتے ہیں اور بالآخر حسب ذیل مسئلہ پہنچتے ہیں:

اگر ایک ذرہ $و$ کے گرد ایک مدار مرتشم کر رہا ہو تو ذرہ کی

رفتار کا معیار و کے گرد مستقل ہوتا ہے۔

۲۲۰۔ ہم نے فرض کیا ہے کہ ذرہ ف سے و تک وقت فرت میں حرکت کرتا ہے اور اس لیے ف پر اس کی رفتار و ہو تو ف ف = و فرت۔ جب ذرہ اپنا مدار مرسم کرتا ہے تو اس اثناء میں خط و ف مدار کے مستوی میں ایک رقبہ مرسم کرتا ہے۔ وقت فرت میں مرسم شدہ رقبہ (۲۷۵)

چھوٹے مثلث و ف و کا رقبہ ہے۔ چنانچہ

وقت فرت میں مرسم شدہ رقبہ

$$= \text{رقبہ و ف و}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ و ق} \times \text{ف ف}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ و ق} \times \text{و فرت}$$

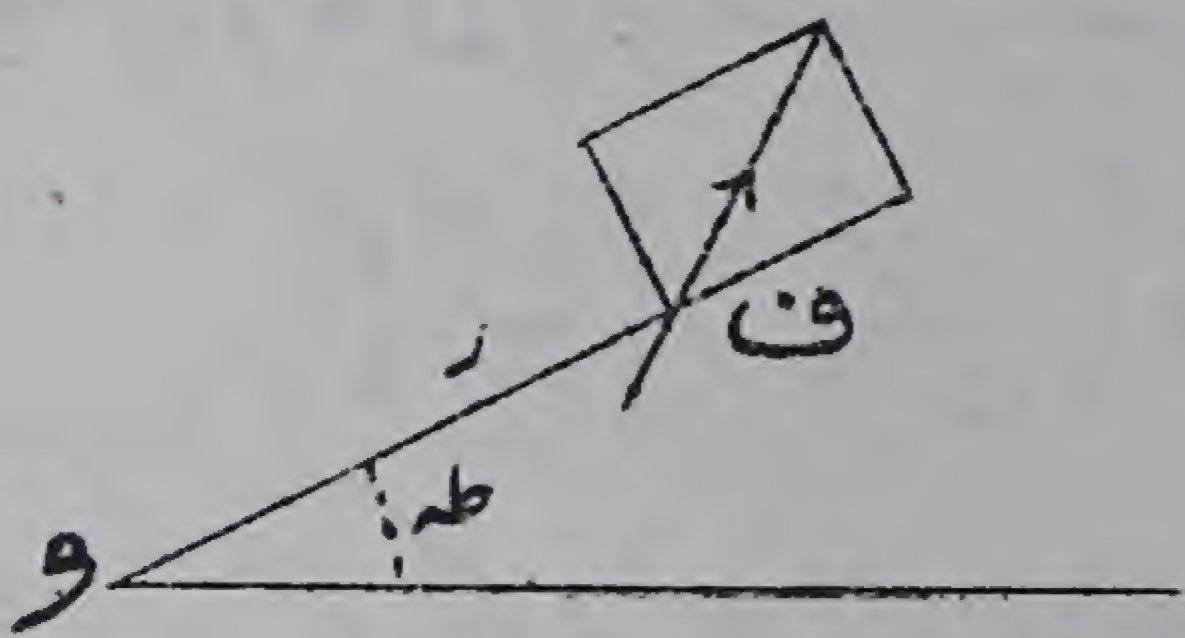
= $\frac{1}{4} \text{ فرت} \times \text{رفتار کا معیار و کے گرد}$

پس فی اکائی وقت مرسم شدہ رقبہ، و کے گرد رفتار کے معیار کا نصف ہے اور پچھلے دفعہ کی رو سے یہ مستقل ہے۔ اس لیے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

مساوی رقبے مساوی وقتوں میں مرسم ہوتے ہیں۔

مدار کی تفرقی مساوات

۲۲۱۔ اوپر کے ثابت شدہ مسئلہ اور توانائی کے بقاء کے مسئلہ کو ایک



شکل (۱۳۷)

لینے سے ہم اس مدار کی مساوات معلوم کر سکتے ہیں جس میں ذرہ حرکت کرتا ہے۔ اس مساوات کو سب سے زیادہ سہولت کے ساتھ قطبی محدود میں بیان کیا جاسکتا ہے جبکہ قوت کے

مرکز کو مبدا، فرض کیا گیا ہو۔

اگر ذرہ کے محدود رُطہ ہوں تو رفتار کو دو رفتاروں کا مرکب خیال

کیا جاسکتا ہے (۱) رفتار $\frac{فرط}{فرت}$ سمت وف میں (۲) رفتار $\frac{فرط}{فرت}$ سمت وف کے علی القوام۔
اس لیے رفتار

$$و^۲ = \left(\frac{فرط}{فرت} \right)^۲ + \left(\frac{فرط}{فرت} \right)^۲$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

و کے گرد رفتار کا معیار دوسرے جزو ترکیبی کے معیار کے مساوی ہے کیونکہ پہلے جزو ترکیبی کا معیار معدوم ہوتا ہے۔ اس لیے و کے گرد رفتار کا معیار $ر \times \frac{فرط}{فرت}$ ہے اور چونکہ اس کی قیمت مستقل ہے (فرض کرو) اس لیے حاصل ہوتا ہے:

$$ر \times \frac{فرط}{فرت} = و \quad (۱۰۹)$$

اگر ذرہ کی کمیت ک ہو اور اگر فی اکائی کمیت کشش ف (ر) ہو جبکہ ذرہ و سے فاصلہ ر پہ ہے تو ذرہ کی توانائی بالقوہ

(۲۷۶)

ک ک ف (ر) فر

ہے اور توانائی بالحکمت $\frac{۱}{۲} ک و^۲$ یا

$$\frac{۱}{۲} ک \left[\left(\frac{فرط}{فرت} \right)^۲ + \left(\frac{فرط}{فرت} \right)^۲ \right]$$

ہے۔ اب چونکہ مجموعی توانائی مستقل ہوتی ہے اس لیے

$$(110) \quad \left(\frac{f_r}{f_t} \right)^2 + \left(\frac{f_r}{f_t} \right)^2 + 2 \sqrt{f_r f_t} = c$$

جہاں c مستقل ہے۔
 مساواتوں (۱۰۹) اور (۱۱۰) سے مدار کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ چونکہ r اور t دونوں t کے تفاعل میں اس لیے

$$\frac{f_r}{f_t} = \frac{f_r}{f_t} = \frac{f_r}{f_t}$$

اور اس لیے مساوات (۱۱۰) کو شکل

$$\left[\left(\frac{f_r}{f_t} \right)^2 + \left(\frac{f_r}{f_t} \right)^2 + 2 \sqrt{f_r f_t} \right] = c$$

میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ اور پھر اس مساوات اور (۱۰۹) سے $\frac{f_r}{f_t}$ کو ساقط

کرنے سے مدار کی تفرقی مساوات

$$(111) \quad \left[\left(\frac{f_r}{f_t} \right)^2 + \left(\frac{f_r}{f_t} \right)^2 + \frac{f_r}{f_t} \right] = c$$

حاصل ہوتی ہے۔

معکوس مربع کا قانون

۲۲۲۔ اب فرض کرو کہ کشش، فاصلے کے معکوس مربع کے قانون کے تابع ہے اور اس لیے

$$f = \frac{m}{r^2}$$

جہاں m مستقل ہے۔ تب

$$(112) \quad \sqrt{f} = \frac{m}{r}$$

(۲۷۷) اور مساوات (۱۱۱) ہو جاتی ہے

$$ع = \frac{م^۲}{ر} - \frac{م^۲}{ر^۲} \left[۱ + \left(\frac{فر}{ر} \right)^۲ \right]$$

اس لیے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{فر}{ر} = \frac{فر^۲}{ر^۲} = \frac{فر^۲}{ر^۲} = \frac{فر^۲}{ر^۲}$$

اور تکمیل کرنے سے

$$ط = جب \frac{م}{ر} - \frac{م}{م} = \frac{م}{م} + \frac{م}{م} + ع$$

جہاں م تکمیل کا مستقل ہے۔
مختصر کرنے پر

$$(۱۱۳) \quad \frac{م}{ر} - \frac{م}{م} = \frac{م}{م} + ع \quad جب (ط - م)$$

اور اگر ہم مساوات

$$\frac{ل}{۱} = ۱ - ز$$

کے ساتھ اس کا مقابلہ کریں تو ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (۱۱۳) ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے جس کا ماسکہ مبداء ہے اور وتر خاص ل = $\frac{م}{م}$ اور خروج المکرز

$$ز = \sqrt{۱ + \frac{ع}{م}} - خط ط = . کو مخروطی کے محور اعظم پر منطبق کرنے کے لیے$$

م کی قیمت کو $\frac{۱}{۲}$ کے مساوی رکھنا چاہئے۔

۲۲۳ — ہم دیکھتے ہیں کہ اگر

ϵ مثبت ہو تو $z < 1$ اور مدار قطع زائد ہے،
 ϵ صفر ہو تو $z = 1$ اور مدار قطع مکانی ہے،
 ϵ منفی ہو تو $z > 1$ اور مدار قطع ناقص ہے۔
 اس لئے مرتسم شدہ مخروطی کی قسم صرف ϵ کی قیمت پر منحصر ہوتی ہے
 اور μ کی قیمت پر منحصر نہیں ہوتی۔ یہ معلوم رہے کہ اگر وہ نقطہ معلوم ہو جس
 ذرہ پھینکا گیا ہے اور نیز پھینکنے وقت ذرہ کی رفتار بھی معلوم ہو تو ϵ کی قیمت
 متعین ہو جاتی ہے کیونکہ مساوات (۱۱۰) کی رو سے

$$\epsilon = \frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r}$$

پس مرتسم شدہ مخروطی کی قسم صرف پھینکنے کی رفتار پر منحصر ہوتی ہے
 اور سمت پر منحصر نہیں ہوتی، مخروطی ایک قطع زائد، قطع مکانی، یا قطع ناقص
 ہوگا بموجب اس کے کہ

$$v^2 = \frac{\mu}{r} \text{ یا } v^2 > \frac{\mu}{r}$$

اصلی خروج المرکز، ϵ اور μ دونوں پر منحصر ہوتا ہے کیونکہ اگر
 ز خروج المرکز ہو تو

$$z^2 = 1 + \frac{\epsilon}{\mu}$$

۲۲۴۔ اگر ذرہ کو ایک دائرہ مرتسم کرنا ہے تو حاصل ہونا چاہئے
 $z^2 = 1$ اور اس لئے

$$1 = 1 + \frac{\epsilon}{\mu}$$

اب $\epsilon = \frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r}$ اور $\mu = r \cdot \omega^2$ رکھنے سے (اس لئے ω
 وہ عمود ہے جو قوت کے مرکز سے پھینکنے کی سمت پر کھینچا گیا ہے)
 مساوات بالا

$$\frac{m^2}{f} - \frac{m^2}{r} = \frac{m^2}{r} + \frac{m^2}{r} = 0$$

$$\text{یا } (f - \frac{m^2}{r}) + m^2 (\frac{1}{r} - \frac{1}{f}) = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

چونکہ 'ف' سے بڑا نہیں ہو سکتا اس لیے ان دو رقموں میں سے کوئی منفی نہیں ہو سکتی۔ اس لیے اس مساوات کے پورا ہونے کے لیے دونوں رقمیں معدوم ہوتی چاہئیں اور حاصل ہونا چاہئے

$$f = r \text{ اور } \frac{m^2}{r} = \frac{m^2}{r}$$

پہلی مساوات سے ظاہر ہے کہ ذرہ کو پھینکنے کی سمت اس خط کے علی القوام ہونی چاہئے جو ذرہ کو قوت کے مرکز سے ملاتا ہے۔ دوسری مساوات جس کو شکل

$$\frac{m^2}{r} = \frac{m^2}{r}$$

میں لکھا جاسکتا ہے اس امر کو ظاہر کرتی ہے کہ تجاذبی قوت کو عین اتنا اسراع پیدا کرنا چاہئے جو نصف قطر کے ایک دائرہ میں حرکت کے لیے مناسب ہے۔

۲۲۵۔ ناقصی مدار کے لیے مدت دوران وہ ہے جو رقبہ πr^2 ب مرتسم کرنے کے لیے مطلوب ہوتی ہے جہاں 'ر'، ناقص کے نیم محور ہیں۔ چونکہ رقبہ شرح $\frac{1}{2} \pi r^2$ فی اکائی وقت سے مرتسم ہوتا ہے اس لیے مدت دوران 'ت'

(۲۷۹)

$$ت = \frac{\pi r^2}{\frac{1}{2} \pi r^2}$$

ہوگی۔ لیکن نیم وتر خاص ل = $\frac{r}{2}$ اور نیز $\frac{r}{2} = \frac{r}{2}$ ، اس لیے

$$b = \sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{m}}$$

$$\text{اس لیے } t = \frac{2\pi b}{v} = \frac{2\pi}{v} \sqrt{\frac{1}{m}} \quad (114)$$

چونکہ 'ت' خروج المرکز پر منحصر نہیں ہے اس لیے یہ ظاہر ہے کہ کسی مدار کی مدت دوران وہی ہے جو اس دائری مدار کی ہے جس کا نصف قطر نیم محور اعظم کے مساوی ہو۔

۲۲۶۔ معکوس مربع کا قانون تجاذب کا قانون ہے، اس لیے وہ قانون جس کی تحقیق میں ہم مصروف تھے وہ ہے جس کے تحت سورج کے گرد سیارے اپنے اپنے مداروں میں اور نیز شہاب اور دمدار ستارے حرکت کرتے ہیں۔ ان اسباب کی تشریح یہاں نہیں کی جا سکتی جن کی بنا پر سیاروں سے مرسم شدہ مخروطی سب کے سب چھوٹے خروج المرکز کے قطعات ناقص ہیں۔ دمدار ستاروں کے مداروں میں زیادہ وسعت پائی جاتی ہے۔ یہ اجرام بالعموم نظام شمسی کے باہر بہت دور سے آتے ہیں۔ تقریبی طور پر ہم سمجھ سکتے ہیں کہ وہ لاتناہی چلے آ رہے ہیں اور انہوں نے نسبتاً چھوٹی رفتار سے حرکت کی ابتدا کی ہے۔ اس صورت میں مدار تقریباً مکافی ہوتا ہے۔

کیپلر کے قوانین

۲۲۷۔ سیاروں کے مداروں کے نظریہ کے انکشاف سے بہت پہلے جس کو نیوٹن نے باقاعدہ محسوب کیا تھا کیپلر نے وہ تین خاص قوانین تجربی طور پر معلوم کئے تھے جن کے تحت سیاروں کی حرکتیں جاری ہیں۔ کیپلر کے یہ تین قوانین حسب ذیل ہیں:

قانون (۱)۔ ہر سیارہ ایک قطع ناقص مرسم کرتا ہے

جس کے ایک ماسک پر سورج ہوتا ہے۔

قانون (۲)۔ وہ رقبے جو سیارہ اور سورج کو ملانے والا نصف قطر سیارہ کے مدار میں مرسم کرتا ہے ان وقتوں کے متناسب ہوتے ہیں جن میں یہ رقبے مرسم ہوتے ہیں۔

قانون (۳)۔ ان مختلف مداروں کے دوری مدتوں کے مربع ان کے محاور اعظم کے مکعبوں کے متناسب ہوتے ہیں۔
ان میں سے پہلے قانون سے نیوٹن نے ثابت کیا کہ سیاروں اور سورج کے درمیان قوت کا قانون معکوس مربع کا قانون ہونا چاہیے۔
تیسرے قانون سے اُسی واقعہ کا اظہار ہوتا ہے جس کو مساوات (۱۱۴) بیان کرتی ہے۔

دو ذروں کی حرکت ایک دوسرے کے گرد

۲۲۸۔ اجرام کا وہ زوج جس کو دوہرا تارہ کہتے ہیں آسمان میں عام طور پر دیکھا جاسکتا ہے۔ یہ تارہ دو ستاروں پر مشتمل ہوتا ہے جو ایک دوسرے کے گرد مدار مرسم کرتے ہیں اور ان میں سے کوئی ثابت نہیں ہوتا ہے۔
نویں باب میں ثابت شدہ مسئلوں سے ان دو ستاروں کا مرکز ثقل یا توازن رہنا چاہئے یا ایکساں رفتار سے ایک خط مستقیم میں حرکت کرنا چاہئے اور اس صورت میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اس کو ثابت سمجھا جاسکتا ہے اگر تمام حرکت کو ایک ایسے حوالے کے فریم کے لحاظ سے پیمائش کیا جائے جو اس نقطہ کے ساتھ حرکت کرے۔

فرض کرو کہ کسی لمحہ پر ان دو ستاروں کے محل 'ا' 'ب' ہیں اور فرض کرو کہ ان کا مرکز ثقل 'ث' ہے۔ فرض کرو کہ ستاروں کی کمیتیں 'ک' 'ک' ہیں

اور فرض کرو کہ $\frac{d}{dt}$ سے ان کے فاصلے $\frac{1}{b}$ ہیں۔ اب

$$(115) \quad \frac{c}{b} = \frac{c}{1} = \frac{c + b}{b + 1}$$

تجاذب کا پورا قانون، قانون

$$\frac{c}{b} = \frac{c}{1}$$

میں بیان ہو جاتا ہے جہاں $\frac{c}{b}$ کمیتیں ہیں اور ان کے درمیان فاصلہ $\frac{1}{b}$ ہے اور $\frac{c}{b}$ ایک مستقل ہے جس کی قیمت تجربہ سے معلوم کی جاسکتی ہے اور ان دو کمیتوں کے درمیان تجاذبی قوت $\frac{c}{b}$ ہے۔ پس ستارہ $\frac{c}{b}$ پر عمل کرنے والی قوت

$$\frac{c}{b} = \frac{c}{1}$$

(۲۸۱) ہے اور اس کی سمت $\frac{1}{b}$ ہے۔ اس قوت کے متعلق ہمیشہ یہ فرض کیا جاسکتا ہے کہ وہ ثابت نقطہ $\frac{d}{dt}$ سے عمل کر رہی ہے کیونکہ اس کا خط عمل ہمیشہ $\frac{d}{dt}$ رہتا ہے۔ نیز اس قوت کی مقدار ستارہ $\frac{c}{b}$ کی فی اکائی کمیت پر

$$\frac{c}{b}$$

ہے یا رشتوں (۱۱۵) کی مدد سے

$$\frac{c}{b} = \frac{c}{1}$$

ہے۔ یہ ایک قوت $\frac{c}{b}$ ہے جو $\frac{d}{dt}$ کی جانب عمل کرتی ہے اگر ہم کہیں

$$\frac{c}{b} = \frac{c}{1}$$

پس ان دو ستاروں میں سے ہر ایک، مشترک مرکز ثقل دت کے گرد ایک مخروطی مرتسم کرتا ہے۔ ان مخروطیوں کے مداروں کی مدت دوران دت اور محاور اعظم کی قیمتوں کا ہیئتیی طور پر مشاہدہ کرنا ممکن ہے۔ ان مقداروں سے ہم یہ کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں اور اس لیے

ک^۳ ، ک^۳

(ک + ک)^۲ (ک + ک)^۲

کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں اور پھر ان سے ک، ک کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اس طریقہ پر بعض ستاروں کی قیمتیں معلوم کرنا ممکن ہے۔

مثالیں

(تجاذبی مستقل جہ کو سنتی میٹر گرام ثانیہ اکائیوں میں 10×6656 کے مساوی ہے)

۱۔ اگر زمین جذب کرے گویا کہ اس کی کمیت اس کے مرکز پر مرکوز ہے اور اگر خط استواء پر جس کا فاصلہ زمین کے مرکز سے 10×65348 سنتی میٹر ہے ج کی قیمت 94861 سنتی میٹر فی ثانیہ فی ثانیہ ہو تو زمین کی کمیت معلوم کرو۔

۲۔ زمین اور چاند کی کمیتوں کو علی الترتیب 10×6612 اور 10×692 گرام لیکر اور ان کے درمیان فاصلہ 10×3684 تسلیم کر کے چاند کی مدت دوران معلوم کرو۔

۳۔ سورج کی کمیت کو 10×33 گرام اور سال کو 36524 یوم لیکر زمین کے مدار کا نیم محور اعظم معلوم کرو جبکہ سورج کو قوت کا ثابت مرکز سمجھا گیا ہو۔

۴۔ اگر سورج کی کمیت زمین کی کمیت کا 322000 گنا ہو تو معلوم کرو کہ سوال (۳) کے نتیجہ کو کس قدر تبدیل کرنا چاہئے جبکہ سورج کی حرکت کا بھی لحاظ رکھا جائے۔

۵۔ مشتری کی کمیت کو سورج کی کمیت کا $\frac{1}{1080}$ اور سورج سے اس کے

(۲۸۲)

بڑے سے بڑے فاصلہ کو 49850000 میل لیکر ثابت کرو کہ مشتری کی کشش کی

وجہ سے سورج ایک قطع ناقص میں تقسیم کرے گا جس کا نیم محور اعظم تقریباً ... ۲۶۱ میل کے مساوی ہوگا۔ نیز مشتری کے سال کا طول معلوم کرو۔

۶۔ وہ اعظم رفتار جو زمین اپنے مدار میں حاصل کرتی ہے ... ۳ سینٹی میٹر فی ثانیہ ہے اور اس کی اقل رفتار ... ۲۹۲۰ سینٹی میٹر فی ثانیہ ہے۔ زمین کے مدار کا خروج المرکز معلوم کرو۔

عام مثالیں

- ۱۔ ایک ذرہ جس کو دوری کے ذریعہ ایک نقطہ سے باندھا گیا ہے ایک انتصابی دائرے میں مکمل گردش کرنے کے لیے عین توانائی رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ دوری کا تناؤ صفر ہوگا جبکہ ذرہ اپنے راستے کے بلند ترین نقطہ پر ہوگا لیکن ذرہ کے وزن کا چھ گنا ہوگا جبکہ ذرہ اپنے راستے کے زیر ترین نقطہ پر ہوگا۔
- ۲۔ ایک ذرہ ایک چلنی دائری قوس کے محذب رخ پر نیچے پھسلے ہوئے جاذبہ کے تحت ایک انتصابی دائرہ میں حرکت کرتا ہے۔ اگر اس کی رفتار وہ ہو جو مرکز کے اوپر ارتفاع f کی وجہ سے ہو سکتی ہے تو ثابت کرو کہ وہ دائرہ سے اڑ کر نکل جائے گا جبکہ اس کا ارتفاع مرکز کے اوپر $\frac{f}{2}$ ہو جائے۔
- ۳۔ اگر زاویہ θ جس میں سے ایک سادہ رقاص انتصابی کی ہر ایک جانب جھولتا ہے چھوٹا ہو مگر صغیر نہ ہو تو ثابت کرو کہ پہلے تقرب تک اہتزاز کا وقت

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g} \left(1 + \frac{1}{16} \theta^2 \right)}$$

ہے۔ اس سے اخذ کرو کہ وہ رقاص جو ثانیوں کو صحیح طور پر ضربوں سے ظاہر کرتا ہے جبکہ وہ صغیر اہتزاز کر رہا ہو تقریباً ۴۰ ثانیہ فی یوم سست ہو جائے گا اگر اس کو ایک گھڑی میں لگا دیا جائے جو اس کو انتصابی کی ہر ایک جانب ۵° اہتزاز کرنے پر مجبور کرے۔

۴۔ ایک ٹرین ایک منحنی کے گرد ۶۰ میل فی گھنٹہ کی ایکساں رفتار سے

طبعی طول 'ل' اور لچک کے مقیاس 'لہ' ہیں اور ان کے دوسرے سرے تلی کے ثابت نقطوں سے بندھے ہوئے ہیں۔ اگر ذرہ تلی میں اہتزاز کرے چھوٹے یا بڑے تو ثابت کرو کہ اہتزاز کی مدت

$$\frac{\pi^2}{\frac{1}{L} + \frac{1}{L}} \sqrt{\frac{K}{L}}$$

۹۔ ایک ڈوری ایک چکنے افقی مینر کے ایک چھوٹے سواراخ میں سے گذرتی ہے اور اس کے سروں سے مساوی ذرے بندھے ہوئے ہیں جن میں سے ایک انتصائباً لٹک رہا ہے اور دوسرا مینر پر سواراخ سے فاصلہ 'ل' پر پڑا ہے۔ اس دوسرے ذرہ کو ڈوری کے عمود وار رفتار 'ج' کے ساتھ اچھا لایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ لٹکتا ہوا ذرہ ساکن رہے گا اور یہ کہ اگر اس حالت سکون میں خفیف طور پر خلل پڑے تو چھوٹے اہتزاز کی مدت $\frac{\pi^2}{\frac{1}{L} + \frac{1}{L}} \sqrt{\frac{K}{L}}$ ہوگی۔

۱۰۔ ایک ذرہ نصف قطر 'ا' کی ایک دائری نالی میں ایک کشش 'م' کے تحت جو نقطہ 'ف' کی جانب ہے حرکت کرتا ہے، نقطہ 'ف' دائرہ کے مستوی میں ہے اور اس کے مرکز سے فاصلہ 'ب' پر ہے۔ ذرہ کو رفتار 'و' کے ساتھ دائرہ کے اُس نقطہ سے پھینکا گیا ہے جو 'ف' سے قریب ترین ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ مکمل گردش کرے گا اگر 'ا'، 'م'، 'ب' سے کم نہ ہو۔

۱۱۔ ایک چکنے قطع ناقص کے نیم محور 'ا' اور 'ب' ہیں، اس کو اس طور پر رکھا گیا ہے کہ اس کا محور اعظم انتصائبی ہے۔ ایک ذرہ کو ناقص کی قوس کے مقعر رخ پر اسی رفتار سے پھینکا گیا ہے جو مرکز کے اوپر ارتقاع 'ف' کی باعث پیدا ہو سکتی ہے۔ وہ نقطہ معلوم کرو جس پر ذرہ قوس کو چھوڑ دے گا اور نیز ثابت کرو کہ وہ ناقص کے مرکز میں سے گزرے گا اگر

$$ف = \frac{۸ + ۲}{۳۶۱۶}$$

۱۲۔ ایک ذرہ نصف قطر ۱ کے ایک دائرہ میں کشش مہر فی اکائی کمیت کے تحت حرکت کرنے کے لیے مقید ہے، کشش دائرہ کے اندر ایک نقطہ کی جانب ہے جس کا فاصلہ مرکز سے ف ہے۔ اگر ذرہ کو اس نقطہ سے بڑے سے بڑے فاصلہ پر رکھ کر رفتار سے متحرک کیا جائے تو ثابت کرو کہ وہ دائرہ کے دوسرے ربع پر سے وقت

(۲۸۴)

$$\sqrt{\frac{۱}{۲۶}} \text{ لوک } (۱ + ۲۶)$$

میں گزر جائے گا۔

۱۳۔ ایک ذرہ ایک ناقص کو قوت کے ایک مرکز کے گرد جو ماسکے پر ہے مرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ محور اصغر کے سرے پر کی رفتار کسی قطر کے سروں پر کی رفتاروں کے درمیان وسط تناسب ہے۔

۱۴۔ ایک دُمدار تارہ ایک قطع مکانی کو مرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی رفتار جو اس کے مدار کے محور پر عمود ہے سورج سے سمتی نیم قطر کے بالعکس متناسب ہے۔

۱۵۔ کمیت ک کا ایک دُمدار تارہ جو سورج کے گرد ایک قطع مکانی مرتسم کر رہا ہے مساوی کمیت ک کے ایک ساکن ذرہ سے ٹکراتا ہے اور یہ دونوں کمیتیں باہم حرکت کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کا مرکز ثقل سورج کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرے گا جس کا مرکز سورج ہوگا۔

۱۶۔ یہ مان کر کہ ایک مری جاذبہ کے تغیرات کی رعایت رکھنے کے بعد زمین کے مرکز کے گرد ایک قطع ناقص مرتسم کرتا ہے جس کا ایک ماسکے زمین کے مرکز پر ہے ثابت کرو کہ نقطہ رمیدگی میں سے گزرنے والے ایک افقی مستوی پر معلومہ رفتار و کے لیے بڑے سے بڑا پے

$$۲ ج ۲ و ۲ ص ۲$$

$$۲ ج ۲ و ۲ ص ۲$$

ہے جہاں سے زمین کے مرکز سے نقطہ زمین کی کا فاصلہ ہے۔
 ۱۷۔ جب زمین اپنے مدار کے محور اعظم کے سر پر پہنچتی ہے تو ایک چھوٹا شہاب جس کی کمیت سورج کی کمیت کا $\frac{1}{10}$ حصہ ہے اچانک سورج میں گر جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ سال کا طول بقدر اپنے پہلے طول کے $\frac{1}{10}$ میں حصے کے گھٹ جائے گا۔

۱۸۔ ایک سیارہ θ پر جو سورج S کے گرد حرکت کر رہا ہے ایک چھوٹا شہاب گر جاتا ہے جس کی وجہ سے اس کی رفتار بقدر اپنی پہلی رفتار کے $\frac{1}{10}$ میں حصے کے گھٹ جاتی ہے اگرچہ اس کی سمت نہیں بدلتی۔ N کو چھوٹا سمجھ کر ثابت کرو کہ سیارہ کے مدار کا خروج المرکز بقدر $2N$ (ز + جم طہ) کے گھٹ جائے گا جہاں طہ وہ زاویہ ہے جو S اور مدار کے محور اعظم کے درمیان ہے۔
 نیز ثابت کرو کہ نیا محور اعظم پرانے محوروں کے ساتھ زاویہ $\frac{2N}{2}$ جب طہ بنائیگا۔

۱۹۔ ایک ذرہ ماسکے کے گرد ایک قطع ناقص کو مرسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ بڑی سے بڑی اور کم سے کم زاویائی رفتاریں محور اعظم کے سروں پر واقع ہوتی ہیں اور نیز یہ کہ اگر یہ زاویائی رفتاریں e اور b ہوں تو واسطہ زاویائی رفتار

$$\frac{2(e - b)}{e + b}$$

ہے۔

۲۰۔ ایک مدار تارہ ایک قطع مکانی کو سورج کے گرد مرسم کرتا ہے اور (۲۸۴) اس کا سورج سے قریب ترین فاصلہ زمین کے مدار کے نصف قطر کا ایک ثلث ہے جہاں زمین کے مدار کو دائری فرض کیا گیا ہے۔ زمین کے مدار کے اندر کتنے دنوں مدار تارہ رہے گا؟

۲۱۔ اگر ایک ذرہ پر کشش ایسی بدے جیسے قوت کے مرکز و سے فاصلے کے مربع کے بالعکس تو ثابت کرو کہ دو سمتیں ہیں جن میں کسی ذرہ کو ایک دے ہوئے نقطہ F سے اس طور پر پھینکا جاسکتا ہے کہ اس کے مدار کا محور اعظم معلومہ

محور اعظم ہو۔ اگر $وف = ج$ اور اگر $عم$ وہ زاوے ہوں جو پھینکنے کی سمتیں
 $وف$ کے ساتھ بتاتی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$مم عم عم = ج - ۱$$

جہاں ۱ نیم محور اعظم ہے۔

۲۲۔ ایک ذرہ کو ایک نقطہ $ف$ سے ایک قوت کے تحت جو ایک ثابت
 نقطہ $س$ کی جانب ہے جس کا فاصلہ $ف$ سے $س$ ہے اس طور پر پھینکا گیا ہے کہ
 ذرہ ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے جو $س$ میں سے گزرتا ہے۔ ابتدائی رفتار وہ ہے
 اور رفتار کا معیار $س$ کے گرد ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ وقت

$$\frac{۲}{۳} \pi (۲r^2 \pm ۲r^2) \sqrt{۲ - ۲r^2}$$

میں ایک نیم دائرہ مرتسم کرے گا۔

۲۳۔ کمیت $ک$ کا ایک کُندہ جس کے بالائی اور زیرین رُخ چکنے افقی
 مستوی ہیں متوازی مستوی میں ایک نالی پر حرکت کرنے میں آزاد ہے اور کمیت
 $ک$ کا ایک ذرہ اس کے بالائی رُخ میں ایک ثابت نقطہ پر ایک لچکدار دوری
 سے بندھا ہوا ہے جس کا طبعی طول ۱ اور مقیاس $ل$ ہے۔ اگر یہ نظام سکون سے
 حرکت میں آئے جبکہ ذرہ اس کے بالائی رُخ پر ہو اور دوری نالی کے متوازی اپنے طبعی
 طول کا $۱ + ن$ گنا تخی ہوئی ہو تو ثابت کرو کہ کُندہ جیٹھ

$$\frac{(۱ + ن) ۱ ک}{ک + ک}$$

اور دور

$$\frac{۱ ک ک}{(ک + ک)} \sqrt{\left(\frac{۲}{ن} + \pi\right)^2}$$

کے اہتزاز کرے گا۔

گیارہواں باب

اُستوار اجسام کی حرکت

(۲۸۶)

۲۲۹۔ اس باب میں اُستوار اجسام کی حرکت سے بحث کی جائے گی جبکہ حرکت ایسی ہو کہ اجسام ذرے متصور نہ ہو سکیں۔
 دفعہ ۶۶ میں ثابت کیا جا چکا ہے کہ اُستوار اجسام کی عام سے عام ممکن حرکت حرکت انتقال اور گردش حرکت سے مرکب ہوتی ہے۔ کسی قسم کی قوتوں کے زیرِ عمل کسی اُستوار جسم کی عام حرکت پر بحث کرنے سے پیشتر گردش حرکت کے خواص کا پہلے سے زیادہ تفصیل کے ساتھ امتحان کرنا مناسب ہوگا۔

زاویہ رقرار

۲۳۰۔ ہم دیکھ چکے ہیں (دفعہ ۶) کہ کسی اُستوار جسم کی ہر حرکت کے لہر جس میں ایک نقطہ ف ثابت رہے گردش کا ایک محور ہوتا ہے جو ف میں سے گزرنے والا ایک خط ہے جس کا ہر نقطہ ثابت رہتا ہے۔ اگر اُستوار جسم مسلسل حرکت کر رہا ہو تو ہم اس کی حرکت کی تحلیل حسب ذیل طریقہ پر کر سکتے ہیں۔ ہم اُستوار جسم کا ایک معین نقطہ ف منتخب کرتے ہیں اور حرکت کا حوالہ ایک ایسے حوالے کے فریم سے دیتے ہیں جس میں

نقطہ ف مبداء ہوتا ہے اور جو (فریم) اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ہمیشہ اپنے ابتدائی محل کے متوازی رہتا ہے۔ اس فریم کے لحاظ سے کسی دو لمحات کے درمیان جسم کی حرکت 'ف' کے گرد گردش کی حرکت ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ وقفہ فرت کی اثناء میں جسم کی گردش 'گردش' کے محور

ف ق کے گرد زاویہ فرط ہے۔ تب شرح فرط کی انتہا کو جبکہ فرت

لا انتہا چھوٹا بنا دیا گیا ہو جسم کی زاویہ رفتار کہتے ہیں۔ اس زاویہ رفتار سے اس زاویہ کی پیمائش ہوتی ہے جس میں سے جسم فی اکائی وقت گھومتا ہے۔ اس لیے کسی لمحہ پر ایک استوار جسم کی حرکت کا پورا علم حاصل کرنے کے لیے حسب ذیل امور معلوم ہونے چاہئیں:

(۱) حوالے کے فریم کے لیے منتخب شدہ نقطہ ف کی رفتار کی سمت اور مقدار،

(ب) ف میں سے گزرنے والے گردش کے محور کی سمت،

(ج) گردش کے محور کے گرد زاویہ رفتار کی مقدار۔

۲۳۱ — زاویہ رفتار کے ساتھ دو چیزیں وابستہ ہوتی ہیں: سمت — گردش کا محور — اور مقدار۔ اس لیے اس کو ایک خط سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ وہ ایک سمتی ہے یعنی یہ کہ

زاویہ رفتاروں کو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کیا جاسکتا ہے۔

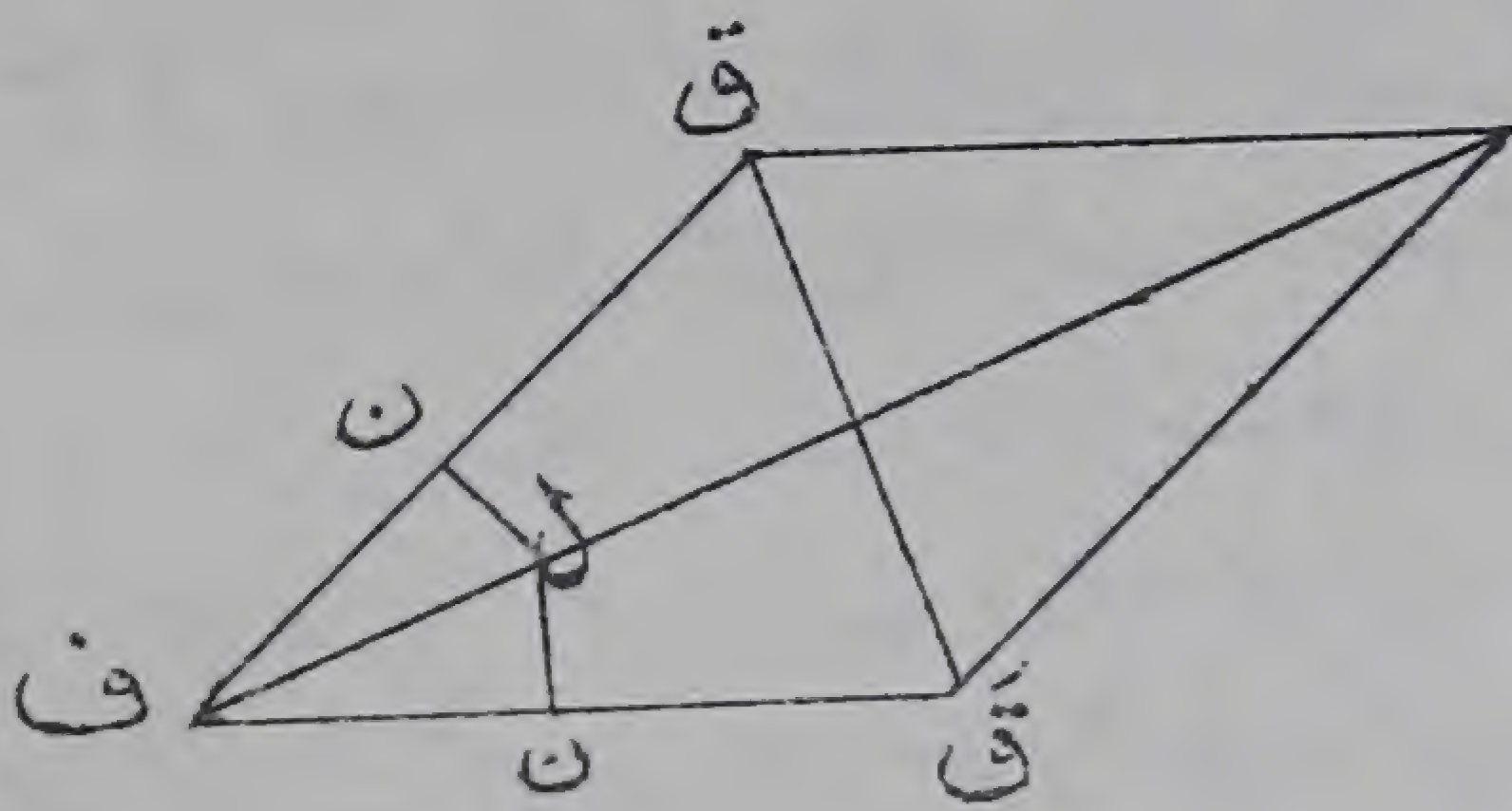
فرض کرو کہ ایک

استوار جسم 'ف' کے

گرد گردش کرتا ہے جو (۱)

ایک محور ف ق کے

گرد زاویہ رفتار سہ کی



شکل (۱۳۸)

ایک گردش اور (ب) ایک دو سرے محور ف ق کے گرد زاویائی رفتار سے کی ایک گردش سے مرکب ہے۔ فرض کرو کہ طول ف ق اور ف ق، سہ اور سہ کے متناسب لیے گئے ہیں اور اس لیے خطوط ف ق اور ف ق، اُسی پیمانہ پر زاویائی رفتاروں کی سمتوں اور مقداروں کو تعبیر کریں گے۔

فرض کرو کہ متوازی الاضلاع ف ق ر ق کی تکمیل کی گئی ہے اور فرض کرو کہ اس کے وتر ف ر پر کوئی نقطہ ل ہے۔ فرض کرو کہ ف ق اور ف ر ق پر ل سے عمود ل ن اور ل ن کھینچے گئے ہیں۔ پہلی زاویائی رفتار کی وجہ سے استوار جسم وقت فرت میں ف ق کے گرد زاویہ سہ فرت میں سے گھومتا ہے۔ اس گردش کا اثر یہ ہوگا کہ جسم کا وہ ذرہ جو ابتدائی پر منطبق تھا مستوی ف ل ن کے علی القوام فاصلہ ل ن \times سہ فرت میں سے حرکت کرے گا۔ اسی طرح ف ق کے گرد گردش کا یہ اثر ہوگا کہ وہی ذرہ مستوی کے علی القوام فاصلہ ل ن \times سہ فرت میں سے حرکت کرے گا لیکن اس سمت میں جو پہلی حرکت کی سمت کے مخالف ہے۔ اس لیے ذرہ کا کل ہٹاؤ

$$ل ن سہ فرت - ل ن سہ فرت \quad (۱۱۶)$$

ہے۔

اب چونکہ ل، متوازی الاضلاع کے وتر پر ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ مثلث ف ل ق کا رقبہ، مثلث ف ل ق کے رقبہ کے مساوی ہے اور اس لیے

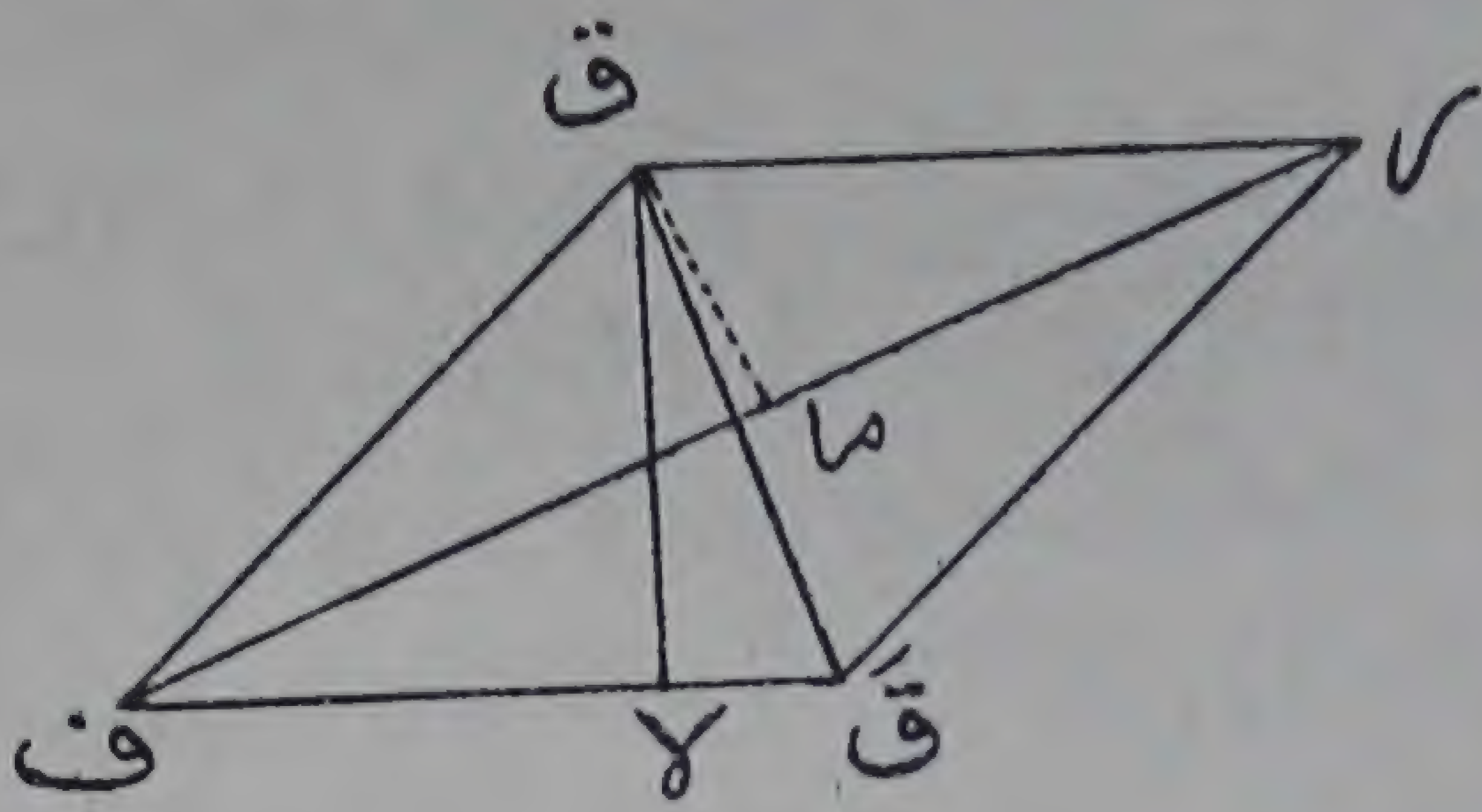
$$ل ن \times ف ق = ل ن \times ف ق$$

نیز چونکہ ف ق : ف ق = سہ : سہ اس لیے یہ مساوات شکل

$$ل ن \times سہ = ل ن \times سہ$$

میں لکھی جاسکتی ہے اور اس کا مقابلہ مساوات (۱۱۶) کے ساتھ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ ذرہ ل کا ہٹاؤ معدوم ہوتا ہے۔

اس لیے مفروضہ دو زاویہ رقتاروں کا حاصل ایک ایسی حرکت ہے کہ نقطے ف اور ل دونوں ساکن رہتے ہیں۔ اس لیے یہ حرکت وہ زاویہ رقتار ہے جس کی گردش کا محور متوازی الاضلاع کا وتر ف ل ہے۔ اس کے بعد زاویہ رقتار کی مقدار معلوم کرنی چاہئے۔ فرض کرو کہ یہ مقدار ط سے تعبیر ہوتی ہے۔ ق سے ف ل اور ف ل پر عمود ق ل، ق ما کھینچو۔



شکل (۱۳۹)

فرہ ق کا ہٹاؤ وقت فرت میں ق ما طاً × فرت ہوگا اور یہ ہٹاؤ مستوی کے علی القوائیم ہوگا۔ لیکن اس ہٹاؤ کو ان ہٹاؤ کے مرکب کرنے سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے جو

زاویہ رقتاروں سے پیدا ہوتے ہیں۔ اول الذکر رقتار سے پیدا شدہ ہٹاؤ صفر ہے کیونکہ ق گردش کے محور پر ہے، اور ثانی الذکر سے پیدا شدہ ہٹاؤ ق ل سے فرت ہے۔ اس لیے

(۱۱۷) $ق ما \times ط فرت = ق ل \times سہ فرت$
 لیکن $ق ما \times ف ل = ق ل \times ف ق$
 کیونکہ ہر ایک متوازی الاضلاع کے رقبہ کے مساوی ہے، اس لیے اس کو ربط (۱۱۷) کے ساتھ لینے سے

$$\frac{ق ل}{ق ف} = \frac{ط}{سہ}$$

اس طرح اگر سہ کو ف ق سے تعبیر کیا گیا ہے تو ط اسی پیمانہ پر ف ل سے تعبیر ہوگا۔ پس ہم نے ثابت کر دیا کہ ایک متوازی الاضلاع ف ق ل مساوی ق ل کے اضلاع

ف ق ف ق سے تعبیر شدہ دو زاویوں رفتاروں کا حاصل ایک زاویہ رفتار ہے جو متوازی الاضلاع کے وتر ف سے

تعبیر ہوتی ہے۔ پس زاویہ رفتار ایک سمتی ہے اور اس کے وہی خواص ہیں جو تمام سمتیوں کے لیے ثابت کئے جا چکے ہیں۔

۲۳۲۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ گردش کے ایک محور کے گرد جس کی سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہیں زاویہ رفتار طا ہو تو طا کی بجائے تین زاویہ رفتاریں سم، سم، سم محدودوں کے محوروں کے گرد لی جاسکتی ہیں ایسی کہ

$$(۱۱۸) \quad \text{سم} = \text{ل طا، سم} = \text{م طا، سم} = \text{ن طا} \quad \text{مربع لیکر جمع کرنے سے}$$

$$(۱۱۹) \quad \text{طا} = \text{سم}^۲ + \text{سم}^۲ + \text{سم}^۲$$

اب ہم دیکھتے ہیں کہ کسی استوار جسم کی حرکت معلوم ہو جاتی ہے

اگر

(۱) نقطہ ف کی رفتار کے اجزائے ترکیبی ع، و، ط

(ب) زاویہ رفتار کے اجزائے ترکیبی سم، سم، سم

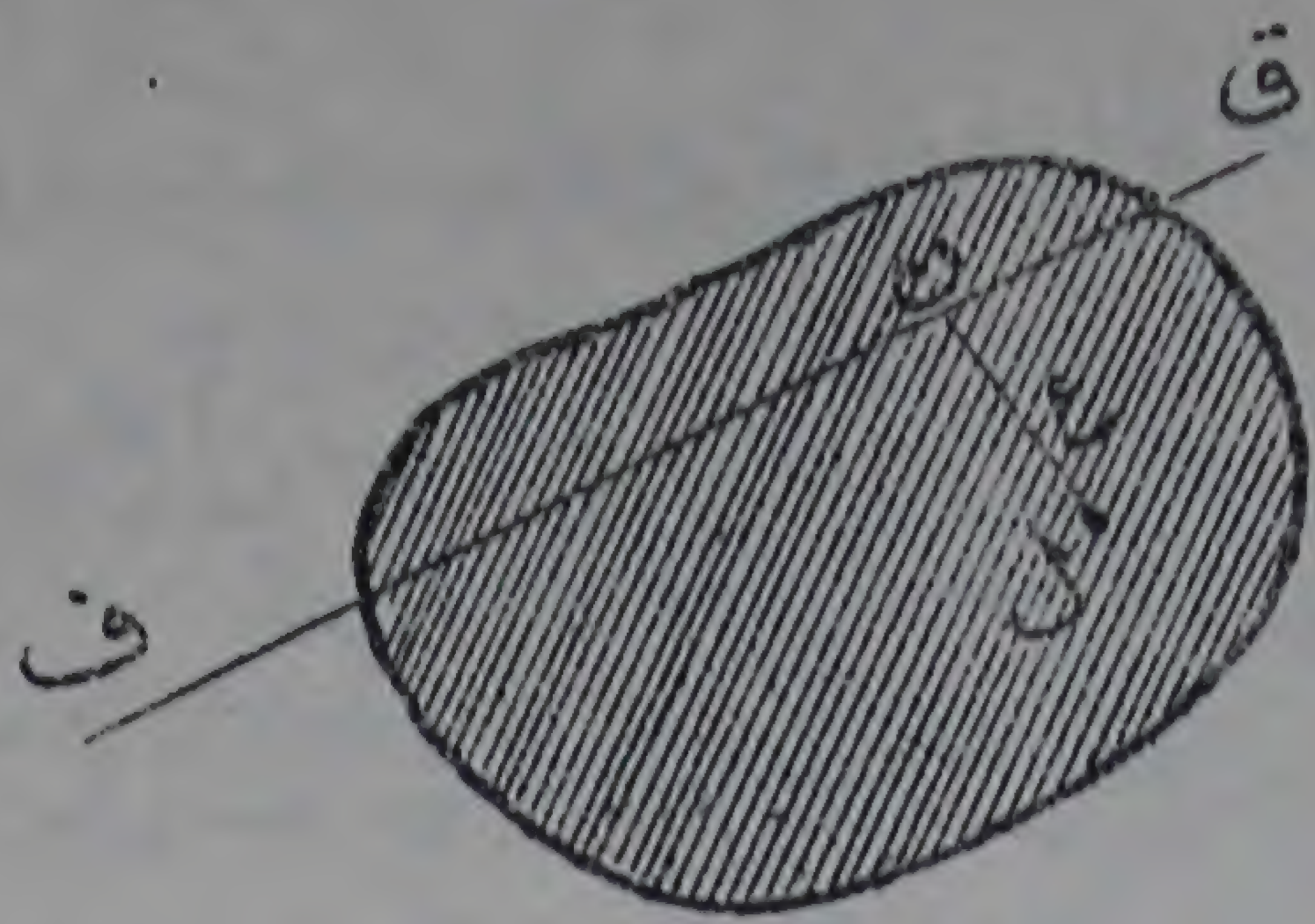
اور

معلوم ہوں۔

گردش کی توانائی بالحرکت

۲۳۳۔ فرض کرو کہ کسی لمحہ پر ایک استوار جسم گردش کے ایک محور ف ق کے گرد زاویہ رفتار طا کے ساتھ گردش کر رہا ہے۔

فرض کرو کہ جسم کا کوئی ذرہ ل ہے اور اس کی کمیت ک ہے۔ فرض کرو کہ ف ق پر عمود ل ن کھینچا گیا ہے اور اس کا طول ع ہے۔



اب ذرہ کی رفتار عطا
ہے اور اس کی توانائی بالحرکت

$\frac{1}{2} k^2 E^2$ طا ہے۔

جمع کرنے پر پورے

جسم کی توانائی بالحرکت

$\frac{1}{2} (k^2 E^2) \text{ طا}$

حاصل ہوتی ہے۔

مقدار $\frac{1}{2} k^2 E^2$

شکل (۱۲۰)

کو محور ف ق کے گرد جمود کا معیار کہتے ہیں۔

اگر ہم مقدار گ داخل کریں ایسی کہ

$$g = \frac{\frac{1}{2} k^2 E^2}{k}$$

یعنی گ، ع کی وہ اوسط قیمت ہے جو جسم کے تمام ذروں پر اوسطاً

لی گئی ہے تو گ کو محور ف ق کے گرد گھاؤ کا نصف قطر کہتے ہیں۔

اب توانائی بالحرکت کو شکل

$$\frac{1}{2} (k^2 E^2) \text{ طا} = \frac{1}{2} (k^2) (g^2) \text{ طا}$$

میں لکھا جاسکتا ہے اور اس لیے توانائی بالحرکت وہی ہے گویا کہ جسم کی
کل کمیت ایک نقطہ پر جس کا فاصلہ گردش کے محور سے گ ہے مرکز ہے۔

استوار جسم کی توانائی بالحرکت

۲۳۴ — نقطہ ف اختیاری ہے اور اس لیے فرض کرو کہ یہ وہ نقطہ

ہے جو جسم کا مرکز ثقل ہے۔ اب جسم کی عام سے عام حرکت (۱) ایک

حرکت انتقال اور (۲) گردش کی ایک حرکت سے مرکب ہو سکتی ہے۔

حرکت (۱) مرکز ثقل کی حرکت انتقال کے مماثل ہے اور حرکت (۲) مرکز ثقل میں سے گزرنے والے ایک محور گرد گردشی حرکت ہے۔
 فرض کرو کہ مرکز ثقل کی رفتار W ہے، مرکز ثقل میں سے گزرنے والے گردش کے محور کے گرد زاویائی رفتار τ اور گھماؤ کا نصف قطر g ہے۔
 فرض کرو کہ جسم کی کل کمیت $C = K$ ۔
 دفعہ ۱۸۶ کے مسئلہ کی رو سے جسم کی کل توانائی بالحرکت دو اجزاء

کا مجموعہ ہے :

(۱) کمیت K کے ایک واحد ذرہ کی توانائی بالحرکت جو جسم کے مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کر رہا ہو،
 (ب) مرکز ثقل کے لحاظ سے حرکت کی توانائی بالحرکت۔

جزو (۱) کی قیمت $\frac{1}{2} K W^2$ ہے اور جزو (ب) کی $\frac{1}{2} K g^2 \tau^2$ ۔

پس مجموعی توانائی بالحرکت

$\frac{1}{2} K (W^2 + g^2 \tau^2)$ (۱۲۰)

ہے۔ یہ جملہ خود بڑی اہمیت رکھتا ہے لیکن یہ اس وجہ سے بھی دلچسپ ہے کہ اس کی مدد سے حسب ذیل مسئلہ ثابت کیا جاسکتا ہے۔

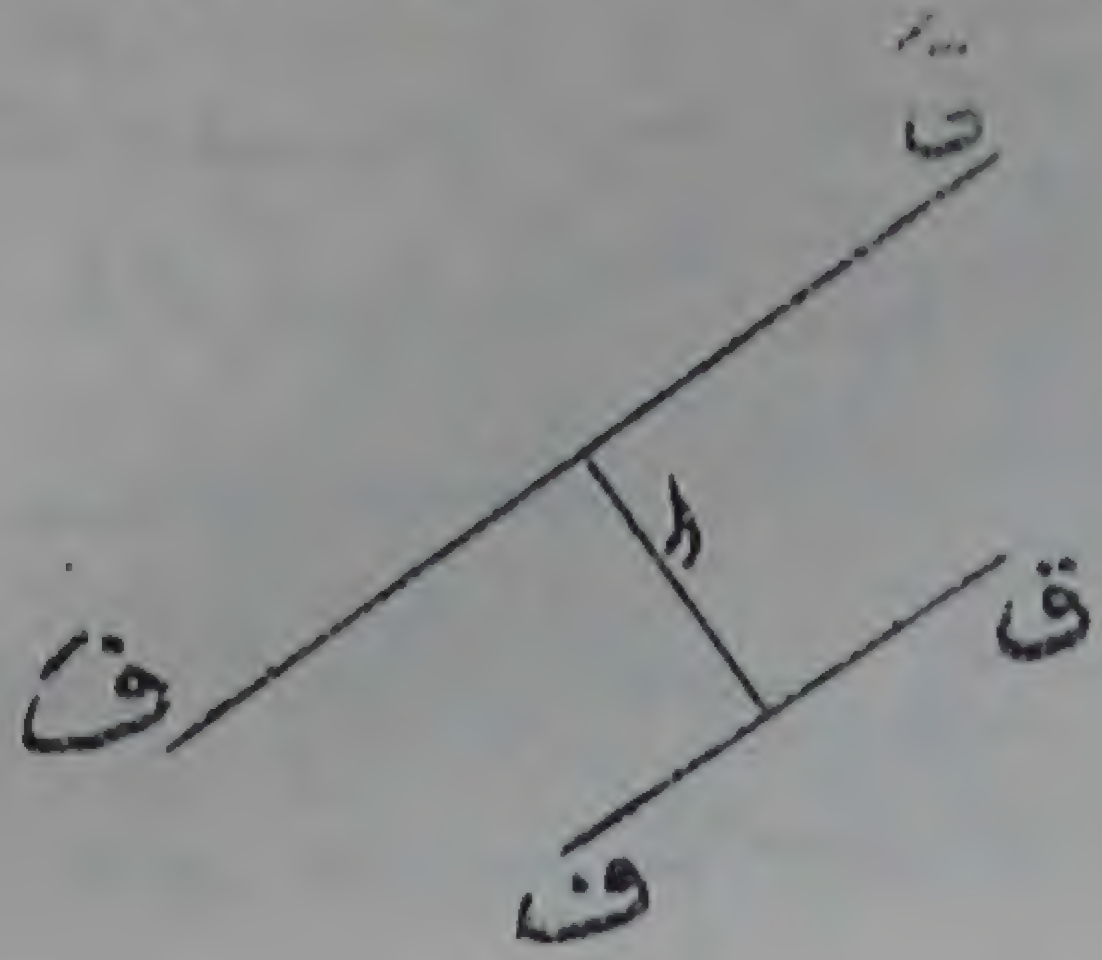
۲۳۵۔ مسئلہ۔ فرض کرو کہ مرکز ثقل میں سے گزرنے والے

کسی محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر g ہے اور فرض کرو کہ اس گھماؤ کے محور سے فاصلہ h پر کے ایک متوازی محور کے گرد گھماؤ کا محور g ہے تو

$$g^2 = g^2 + h^2$$

فرض کرو کہ مرکز ثقل C میں سے گزرنے والا کوئی محور Q ہے اور فرض کرو کہ اس محور سے فاصلہ h پر کوئی متوازی محور F ہے۔

فرض کرو کہ ق ق کے گرد استوار جسم گردش کی حرکت رکھتا ہے اور اس کی زاویائی رفتار ط ہے۔



شکل (۱۴۱)

اب ث کی رفتار ط ہے اور حرکت کو دو حرکتوں سے مرکب خیال کیا جاسکتا ہے (۱) رفتار ط کی حرکت انتقال اور (۲) محور ق ق کے گرد گردش ط کی حرکت۔

ضابطہ (۱۲۰) کی رو سے توانائی بالحرکت ہے

نیز وہ $\frac{1}{2} k^2 \tau^2$ کے مساوی بھی ہے جہاں k 'ق ق' کے گرد گھماؤ کا نصف قطر ہے۔ اس لیے

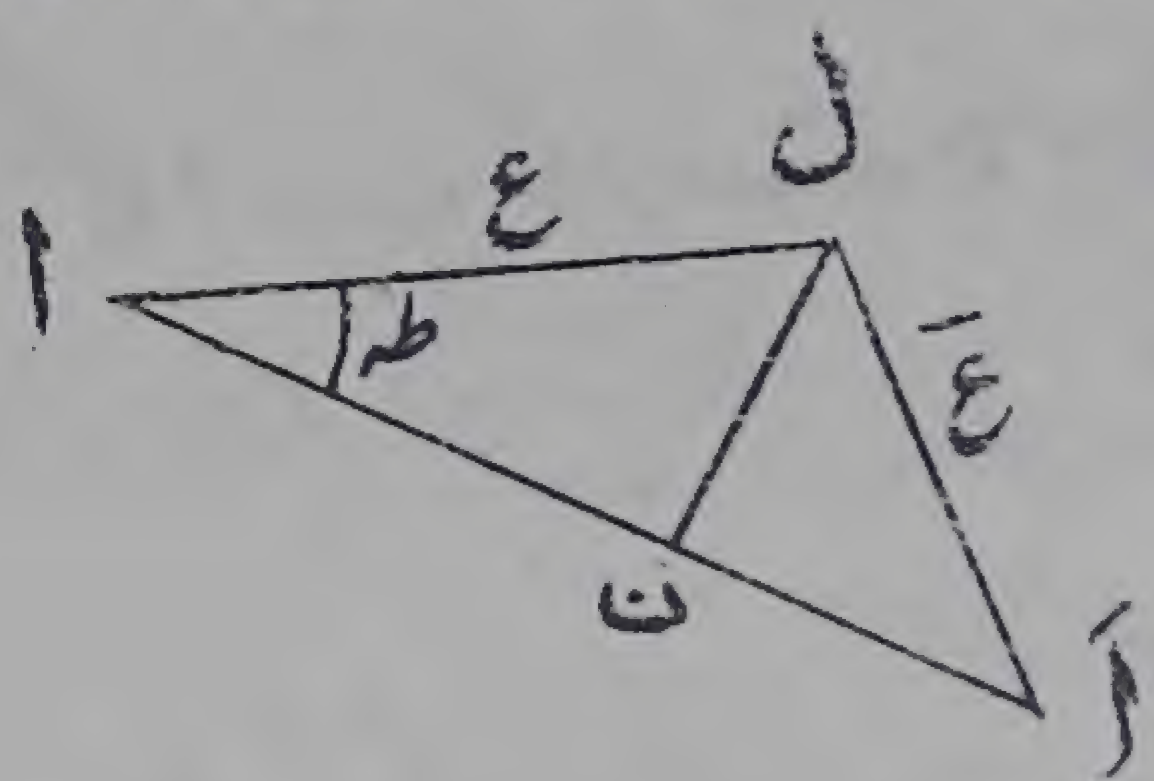
$$\frac{1}{2} k^2 \tau^2 = \frac{1}{2} k^2 (\tau^2 + \tau^2)$$

اور $\frac{1}{2} k^2 \tau^2$ سے تقسیم کرنے پر مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔

۲۳۶۔ متبادل ثبوت۔ اس مسئلہ کو ہندسی طور پر بھی

ثابت کیا جاسکتا ہے:

فرض کرو کہ جسم کا کوئی ذرہ ل ہے اور فرض کرو کہ شکل (۱۴۲) کا مستوی



شکل (۱۴۲)

وہ مستوی ہے جو ل میں سے گزرتا ہے اور گردش کے دو محوروں کے علی القوائم ہے اور یہ محور مستوی کو علی الترتیب نقطوں 'ل'، 'ع' پر قطع کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ ل = 'ع'، ل = 'ن' اور فرض کرو کہ ل = 'ن'۔

۱۱ پر عمود کھینچا گیا ہے۔ تب $گ^۱ = ح^۱ ک^۱ ع^۱$ اور نیز

$$گ^۱ ک^۱ = ح^۱ ک^۱ ع^۱$$

$$= ح^۱ ک^۱ (ع^۱ + ا^۱ - ا^۱ - ع^۱) \times ا^۱ (ا^۱ + ح^۱ ط^۱)$$

$$= گ^۱ ک^۱ + ک^۱ \times ا^۱ (ا^۱ - ا^۱) (ح^۱ ک^۱ \times ا^۱ ن)$$

اب $ا^۱ ن$ خط $ا^۱ ا^۱$ پر اس خط کا ظل ہے جو $ل$ سے مرکز ثقل تک

کھینچا گیا ہے۔ اس لیے $ح^۱ ک^۱ \times ا^۱ ن = .$ اور اس لیے

$$گ^۱ ک^۱ = ک^۱ گ^۱ + ک^۱ \times ا^۱ ا^۱$$

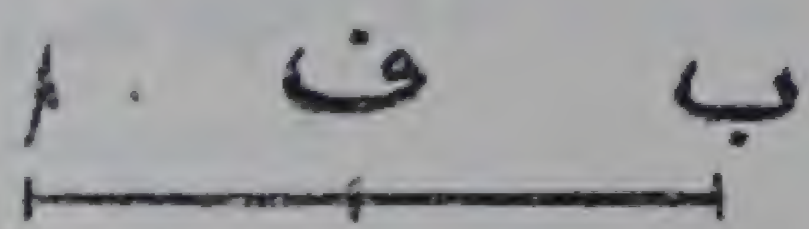
اس کو $گ^۱$ سے تقسیم کرنے پر مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

۲۳۷ — اوپر کے ثابت شدہ مسئلے سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر فوراً معلوم ہو سکتا ہے اگر ہمیں مرکز ثقل میں سے گزرنے والے متوازی محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر معلوم ہو اور اس کے بالعکس۔ اب ہم گھماؤ کے نصف قطروں کو محسوب کرنے کی چند مثالیں دیں گے۔

گھماؤ کے نصف قطروں کو محسوب کرنا

۲۳۸ — یکساں تیل اڈنڈا۔ فرض کرو کہ ڈنڈے $ا^۱ ب$ کا طول $ا^۱ ۲$ ہے اور فرض کرو کہ اس کے عمود وار $ا^۱$ میں سے گزرنے والے محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر $گ$ ہے۔ فرض کرو کہ ڈنڈے کی کمیت $ف$ فی اکائی طول

تہ ہے اور فرض کرو کہ $لا$ وہ محدود ہے جو $ا^۱$ سے فاصلوں کو پیمائش کرتا ہے۔ اس عنصر کی کمیت جو $لا$ سے $لا + فر$ تک ہے تہ $فر$ لا ہے اور گردش کے محور سے اس کا عمودی فاصلہ $لا$ ہے۔ اس لیے



شکل (۱۴۳)

$$گ^۲ = \frac{ح ک ع^۲}{ح ک} = \frac{ک (ب ت فرلا) لا^۲}{ک (ب ت فرلا)} = \frac{ا^۲ ت ۳}{۱ ت ۲} = \frac{۴}{۳} ا^۲$$

اس لیے گھاؤ کا نصف قطر $\frac{۱۲}{۳۶}$ ہے۔

مرکز ثقل کے گرد جس کا فاصلہ ۱ سے ۱ ہے گھاؤ کا نصف قطر

$$گ^۲ = \frac{۴}{۳} ا^۲ - ا^۲ = \frac{۱}{۳} ا^۲$$

سے حاصل ہوگا اور اس لیے مرکز ثقل کے گرد گھاؤ کا نصف قطر $\frac{۱}{۳۶}$ ہے۔

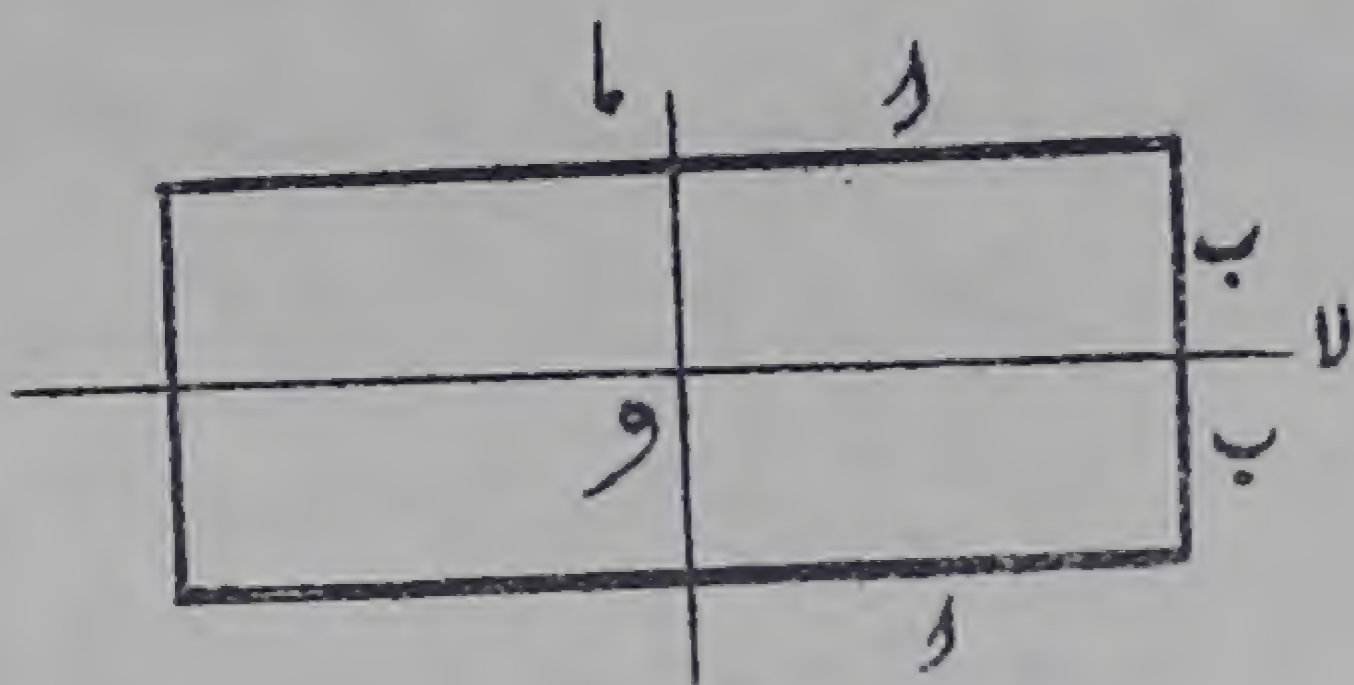
۲۳۹۔ مستطیلی پترا۔ فرض کرو کہ پترے کے کنارے ۱۲، ۲، ب

ہیں اور ہم اس محور کے گرد گھاؤ کا نصف قطر معلوم کرنا چاہتے ہیں جو اس کے مرکز میں سے گذرتا ہے اور اس کے مستوی پر عمود ہے۔ شکل (۱۴۴) کے مطابق محور ۱ اور فرض کرو کہ فی اکائی رقبہ کمیت ۱ ہے۔ تب

$$گ^۲ = \frac{ح ک ع^۲}{ح ک} = \frac{ک (ب ت فرلا فرما) (لا + ما)}{۱۲ ب + ت}$$

(۲۹۳) تکمیل پورے پترے پر لینا چاہئے اور اس لیے حدود لا = ۱ سے لا = ۱۲،
 ۱ = ب سے ما = ۱۲ تک ہیں۔

تکمیل کرنے پر



شکل (۱۴۴)

$$گ^۲ = \frac{۱ + ب^۲}{۳}$$

ب = ۱۲ لینے پر پترا ایک

پتلا ڈنڈا ہو جاتا ہے اور نتیجہ وہی

حاصل ہوتا ہے جو پچھلے دفعہ میں حاصل ہوا تھا۔

۲۴۰۔ متجانس ٹھوس ناقص نما۔ فرض کرو کہ ناقص نما کے نیم

محور ۱، ب، ج ہیں اور فرض کرو کہ ہم محور اعظم کے گرد گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرتے ہیں۔ ناقص نما کے صدر محوروں کو محدودوں کے محور لینے سے اور ناقص نما کی کثافت کو غہ سے تعبیر کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$گ^۲ = \frac{ح ک ع^۲}{ک} = \frac{م م م م (غہ فرلا فرما فری) (ما + ی^۲)}{م م م م غہ فرلا فرما فری}$$

جہاں تکمیل ناقص نما کے پورے حجم پر لیا گیا ہے۔ تکملات کی تکمیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے :-

$$گ^۲ = \frac{ب^۲ + ج^۲}{۵}$$

مثالیں

۱۔ ایک ڈنڈا ۱۲ انچ لمبا ہے۔ اس نقطہ کے گرد گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرو جس کا فاصلہ ایک سرے سے ۴ انچ ہے۔

۲۔ ایک دائری قرص کا گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرو :
(۱) اس محور کے گرد جو قرص کے مرکز میں سے گزرے اور اس کے مستوی پر عمود ہو

(ب) ایک قطر کے گرد۔

۳۔ ثابت کرو کہ نصف قطر ۱ کے ایک کرہ کا گھماؤ کا نصف قطر کسی قطر کے

گرد $\frac{۲}{۳}$ ہے اور کسی مماس کے گرد $\frac{۷}{۵}$ ہے۔

۴۔ ایک مکعب کا گھماؤ کا نصف قطر ایک کنارے کے گرد معلوم کرو۔

۵۔ ایک مربع پتھرے کا گھماؤ کا نصف قطر ایک وتر کے گرد معلوم کرو۔

۶۔ ایک ٹھوس دائری اسطوانے کا گھاؤ کا نصف قطر معلوم کرو:

(ا) ایک محور کے گرد،

(ب) ایک ٹکون کے گرد،

(ج) ایک سرے کے ایک قطر کے گرد۔

۷۔ ثابت کرو کہ ایک ٹھوس مخروطی تیکے کا گھاؤ کا نصف قطر اس کے محور کے

گرد $\sqrt{\frac{3}{10}}$ ہے جہاں 'ا' قاعدے کا نصف قطر ہے۔

راوتھ کا قاعدہ

(۲۹۴)

۱۴۲۔ حسب ذیل سہولت بخش قاعدہ سے جس کو ڈاکٹر راوتھ نے (Rigid Dynamics, 8) بیان کیا ہے گھاؤ کے مختلف نصف قطروں کو یاد رکھنے کا آسان طریقہ حاصل ہوتا ہے۔ اس قاعدہ کا اطلاق خطی، مستوی اور ٹھوس اجسام پر جو

(ا) قائم الزاویہ (ڈنڈا، پتیرا، یا استواری السطوح)

(ب) ناقصی یا دائری (قرص یا پتیرا)

(ج) ناقص نما، کرہ نما، یا کروی (مجسم، ٹھوس)

ہوں ہوتا ہے۔ یہ قاعدہ حسب ذیل ہے:

مرکز ثقل میں سے گزرنے والے تشاکل کے کسی محور کے گرد گھاؤ کا نصف قطر گ، مساوات

گ^۲ = عمودی نیم محوروں کے مربعوں کا مجموعہ

۳، ۴، یا ۵

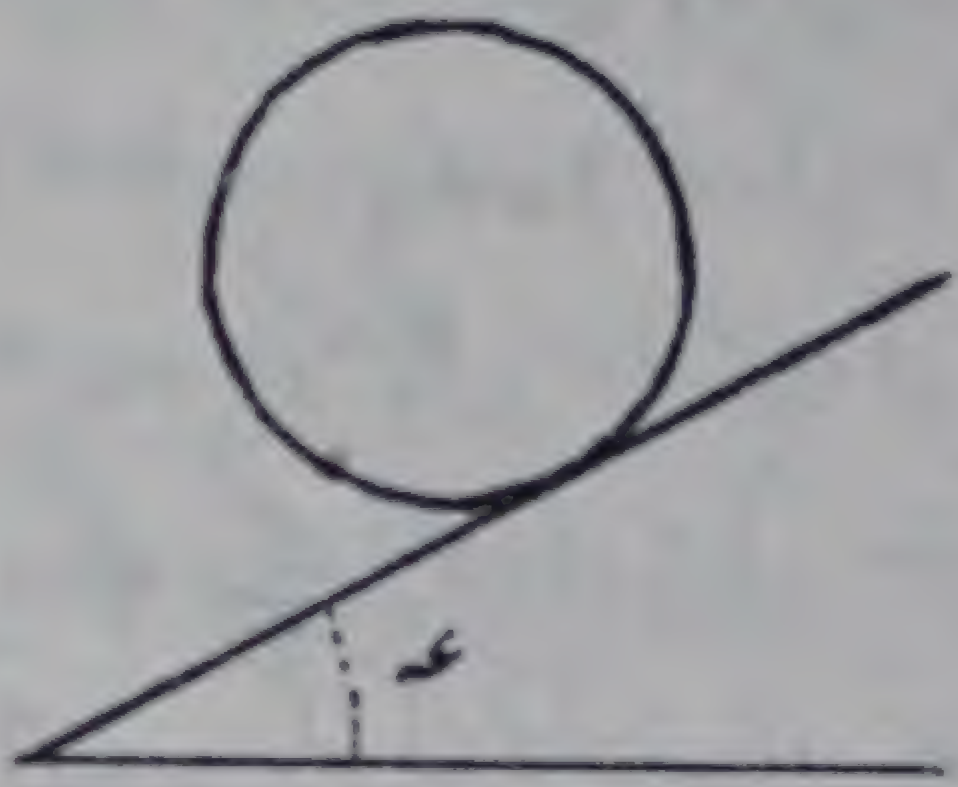
سے حاصل ہوگا جہاں نسب نما ۳، ۴، یا ۵ ہے بموجب اس کے کہ جسم تقسیم (ا)، (ب)، یا (ج) کے تحت ہو۔

توضیحی مثال

ایک سکہ ایک مائل مُستوی پر لڑھکتا ہے۔ کسی فاصلے کے بعد اس کی رفتار اور نیز اس کا اسراع معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سکے کو ایک یکساں دائری قرص سمجھا گیا ہے اور فرض کرو کہ اس کا نصف قطر ۱ ہے۔ جب اس کی رفتار مُستوی کے نیچے و ہوتی ہے تو اس کی زاویائی رفتار $\frac{9}{1}$ ہوگی۔ گردش کا محور سکہ کے مُستوی پر عمود ہے۔

اس کے تشاکل کے نیم محور ۱ ہوں گے جبکہ اس کو پتہ سمجھا جائے۔ مرکز میں سے گزرنے والے گردش کے محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر راوتھ کے قاعدے کی بموجب



شکل (۱۴۵)

$$گ^۲ = \frac{۱^۲ + ۱^۲}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

ہے اور اس لیے توانائی بالحرکت

$$\frac{۱}{۲} ک = [و^۲ + \frac{۱}{۲} (\frac{9}{1})^۲] = \frac{۳}{۲} ک و^۲$$

ہے۔ مُستوی کے نیچے فاصلہ س تک لڑھکنے کے بعد سکہ کا مرکز ثقل فاصلہ س جب ع تک گر چکتا ہے اور اس لیے توانائی کے بقا کے اصول سے

$$ک ج س جب ع = \frac{۳}{۲} ک و^۲$$

اور اس لیے رفتار مساوات

$$و^۲ = \frac{۲}{۳} س ج جب ع$$

سے حاصل ہوگی۔

ضابطہ (۴۸) سے مقابلہ کیا جائے یعنی $و^۲ = ۲ ع س$ سے (ع = اسراع)

جہاں حرکت یکساں اسراع کے تحت ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ سکہ مستوی کے نیچے
یکساں اسراع $\frac{1}{2}g$ جب g کے ساتھ لڑھکتا ہے۔

مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ ایک حلقہ کا اسراع جو میدان g کی ایک پہاڑی پر سے
نیچے لڑھک رہا ہے $\frac{1}{2}g$ جب g ہے۔

(۴۹۵)

۲۔ لو کو موٹف پھیٹوں کے ایک جوڑے کا اسراع معلوم کرو جو ۵۰ میں اڑھائی
نیچے دوڑ رہے ہیں، ہر پہیہ میں ایک سا موٹائی کی ایک کور اور آٹے لگے
ہوئے ہیں، کور کا وزن آٹوں کے وزن کا ڈگنا ہے اور محور کا وزن ایک پہیہ کے
وزن کا نصف ہے۔ (محور کی موٹائی نظر انداز کرو)۔

۳۔ دو سیکل سوار جن کی سیکلیں ایک دوسرے کے ٹھیک مشابہ ہیں ایک
پہاڑی کے نیچے اس کی چوٹی سے مساوی رفتاروں کے ساتھ حرکت کی ابتدا کر کے
اترتے ہیں۔ رگڑ کی قوتوں اور ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ زیادہ
بھاری سوار پہاڑی کے دامن میں پہلے پہنچے گا۔

۴۔ ایٹوڈ مشین کی چرخہ کمیت k کی ایک ایکساں قرص ہے۔
اگر کمیتیں k_1 ، k_2 دوری کے سروں سے لٹکائی جائیں تو ثابت کرو کہ k کا اسراع
 k_1 ، k_2 ۔

$$k_1 + k_2 + k$$

ہے۔

۵۔ دو گڑے جن میں سے ایک کو کھلا خول ہے اور دوسرا متجانس
ٹھوس پہاڑی کی چوٹی سے ایک ساتھ حالت سکون سے نکل کر باہم پہاڑی کے
نیچے لڑھکتے ہیں۔ ثابت کرو کہ راستے کے کسی حصہ پر ان کے اوقات ۵:۳۱
کی نسبت میں ہوں گے۔

۶۔ اگر ایک گاڑی کے پہیوں کی کمیتوں کو کو پر جمع شدہ فرض کیا جائے
تو ثابت کرو کہ گاڑی کی توانائی جبکہ وہ رفتار v کے ساتھ حرکت کر رہی ہو $\frac{1}{2}mv^2$

ہے جہاں ک پوری گاڑی اور پہیوں کے دزنوں کا مجموعہ ہے۔
 ۷۔ یکساں تار کے ایک سیدھے ٹکڑے کو ایک سرے پر انتصاباً استاد
 کیا گیا اور گرنے چھوڑ دیا گیا۔ وہ کس رفتار سے زمین سے ٹکرائے گا۔
 ۸۔ سگار کی شکل کا ایک متجانس ٹھوس کرہ نا (نیم محور ۱ اور ب) اس کی
 نوک کے بل ایک افقی مستوی پر استادہ کیا گیا اور لڑھکنے کے لیے چھوڑ دیا گیا۔ اسکی
 زاویائی رفتار معلوم کرو جبکہ اس کے محور اصغر کا سیر مستوی کے ساتھ تماس میں ہو اور
 اس لمحہ پر مستوی پر کا دباؤ معلوم کرو۔

معیار حرکت کا معیار

۲۴۲۔ فرض کرو کہ کمیت ک کے کسی ذرہ کے محدود لا، ما، ی ہیں۔
 فرض کرو کہ کل حاصل قوت کے جو ذرہ پر عمل کرتی ہے اجزائے ترکیبی لا، ما، ی
 ہیں۔ تب حرکت کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:

$$ک \frac{فر^۲ لا}{فرت^۲} = لا،$$

$$ک \frac{فر^۲ ما}{فرت^۲} = ما،$$

$$ک \frac{فر^۲ ی}{فرت^۲} = ی$$

ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کا معیار محور لا کے گرد ما، ی، ی ما ہے (۲۹۶)
 اور اوپر کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$ما، ی، ی ما = ک \left(ما \frac{فر^۲ ی}{فرت^۲} - ی \frac{فر^۲ ما}{فرت^۲} \right) \quad (۱۲۱)$$

ذرہ کی رفتار کے اجزائے ترکیبی $\frac{فر لا}{فرت}$ ، $\frac{فر ما}{فرت}$ ، $\frac{فر ی}{فرت}$ ہیں اور اس لئے

اس رفتار کا معیار محور لا کے گرد حسب تعریف دفعہ (۲۱۹)

$$\text{ما} \frac{\text{فری}}{\text{فرت}} - \text{ی} \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$$

ہے۔

ذرہ کا معیار حرکت اس کی رفتار کا ک گنا ہے اور اس لیے معیار حرکت کا معیار محور لا کے گرد، رفتار کے معیار کا ک گنا ہے اور اس لیے

$$\text{ک} \left(\text{ما} \frac{\text{فری}}{\text{فرت}} - \text{ی} \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} \right)$$

ہے۔ تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے :

$$\text{فرت} \left[\text{ک} \left(\text{ما} \frac{\text{فری}}{\text{فرت}} - \text{ی} \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} \right) \right]$$

$$= \text{ک} \left[\left(\text{ما} \frac{\text{فری}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}^2} \right) - \left(\text{ی} \frac{\text{فری}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}^2} \right) \right]$$

$$= \text{ک} \left(\text{ما} \frac{\text{فری}}{\text{فرت}} - \text{ی} \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} \right)$$

$$= \text{ما} - \text{ی} \text{ما}$$

(۱۲۲)

مساوات (۱۲۱) سے۔

پس ہم نے ثابت کر دیا کہ

کسی محور کے گرد ایک ذرہ کے معیار حرکت کے معیار کی تبدیلی کی شرح، اسی محور کے گرد اس معیار کے مساوی ہوتی ہے جو ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کا ہے۔

۲۲۳ — مساوات (۱۲۲) 'اجسام کے کسی نظام کے ہر ذرہ کے لیے درست ہے۔ فرض کر دو کہ ہم تمام ذروں کے لیے ایسی مساواتیں معلوم

کرتے ہیں اور ان کو جمع کرتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{فرق} = [\text{ک} (\text{ما فری} - \text{ی فرما})] = \text{ح} (\text{ماے} - \text{ی ما})$$

اس مساوات کی بائیں جانب وہ جملہ ہے جو جسم پر یا اجسام پر عمل کرنے والی بیرونی قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے کیونکہ اندرونی قوتیں مساوی اور مخالف قوتوں کے جوڑوں میں وقوع پذیر ہوتی ہیں اور اس لیے اس کا جملہ بالائیں کوئی حصہ نہیں ہے۔

جملہ $\text{ح} (\text{ما فری} - \text{ی فرما})$ کو جو جداگانہ ذرات کے

معیار حرکت کے معیاروں کا مجموعہ ہے نظام کے معیار حرکت کا معیار کہتے ہیں۔

اس طرح مساوات (۱۲۳) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ کسی محور کے گرد کسی نظام کے معیار حرکت کے معیار میں تبدیلی کی شرح، اس محور کے گرد بیرونی قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔

۲۲۲۔ اس مسئلہ سے متعدد اہم نتیجے نکلتے ہیں:

۱۔ اگر اجسام کے کسی نظام پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں تو

ہر محور کے گرد معیار حرکت کا معیار مستقل رہتا ہے۔
اس سے وہ اصول بیان ہوتا ہے جس کو زاوی معیار حرکت کا بقا کہتے ہیں۔

اس کی ایک مثال سورج سے مہیا ہوتی ہے جس کے متعلق عملاً یہ فرض

کیا جا سکتا ہے کہ اس پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہیں کرتیں۔ یا عموم یہ فرض کیا جاتا ہے کہ سورج حجم میں شکرڑا ہے، اگر ایسا ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ اس کے محور کے گرد اس کی گردش کی رفتار مسلسل بڑھتی چلا ہے تاکہ اس کا معیار حرکت کا معیار مستقل رہ سکے۔

۲۔ اگر ایک نظام پر عمل کرنے والی تمام قوتیں ایک

دئے ہوئے خط کے متوازی ہوں یا اس خط کو قطع کریں تو نظام کے معیار حرکت کا معیار اس خط کے گرد مستقل رہتا چاہئے۔

ایک لٹو پر صرف کیل پر کا تعامل اور جاذبہ عمل کرتے ہیں۔ ثانی الذکر کا معیار لٹو کے کیل میں سے گزرنے والے انتصابی خط کے گرد معدوم ہوتا ہے اور اول الذکر کا معیار تقریبی طور پر معدوم فرض کیا جا سکتا ہے اس لئے لٹو کے کیل میں سے گزرنیوالے خط کے گرد معیار حرکت کا معیار مستقل رہے گا، تقریبی طور پر۔

۳۔ اگر ایک استوار جسم ایک ثابت محور کے گرد گردش کرنے

میں آزاد ہو اور اگر کسی لمحہ پر اس کی زاویائی رفتار سے ہو تو

$$k = \frac{L}{\omega}$$

جہاں k گ^۲ ثابت محور کے گرد جمود کا معیار ہے اور L اس محور کے گرد تمام بیرونی قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ ہے۔

اس کی تصدیق کے لئے صرف یہ دیکھنا ضروری ہے کہ کمیت k کا ایک ذرہ جو محور سے فاصلہ f پر ہے معیار حرکت k f سے رکھتا ہے اور اس لئے پورے نظام کے معیار حرکت کا معیار

$$K = \sum k f^2 = k' g^2$$

ہوگا اور چونکہ ک اور گ ۲ وقت کے ساتھ متغیر نہیں ہوتے اس لیے زاویہ معیاً
حرکت کی تبدیلی کی شرح گ ک ۲ فرسہ فرت ہوگی۔

رقاص کا اہتزاز

۲۴۵۔ پچھلے مسئلہ کا ایک اہم اطلاق یہ ہے کہ کسی قسم کے رقص کے
اہتزاز کا وقت معلوم کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ وہ نصاب ہے جس کے گرد رقص گردش کرتا ہے،
فرض کرو کہ اس کا مرکز ثقل د ث ہے اور و د ث = ۴ اور فرض کرو کہ خط
و د ث انتصابی کے ساتھ کسی لمحہ پر زاویہ طہ بناتا ہے اور اس لیے رقص
کی زاویہ رفتار اس کے محور کے گرد سہ = فرطہ ہے۔

فرض کرو کہ پورے رقص کی کمیت گ ک ہے اور گردش کا نصف
قطر اس کے محور کے گرد گ ہے۔

اب حرکت کی مساوات ہے

$$گ ک ۲ فرسہ فرت = ل$$

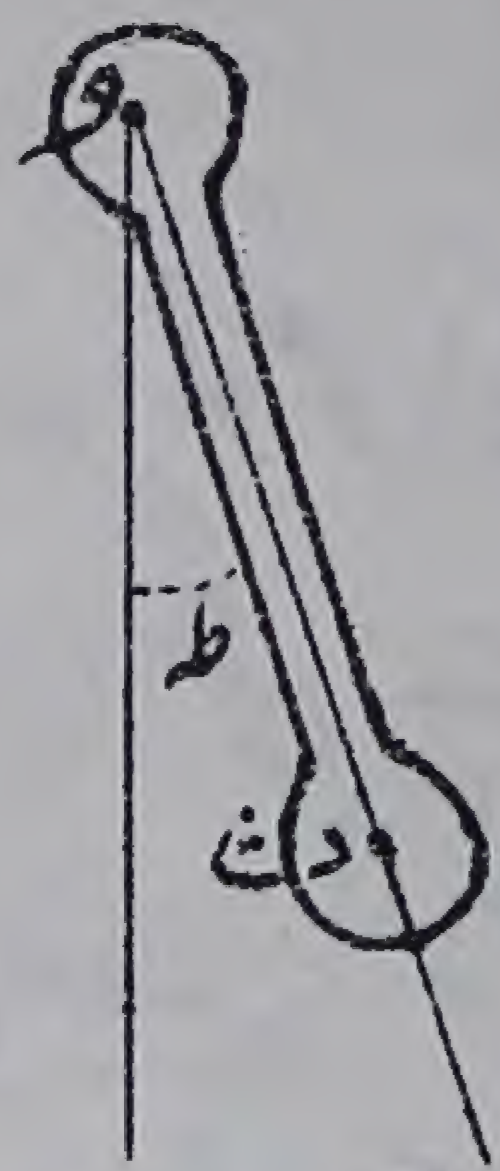
جس میں سہ = فرطہ ، ل کی قیمت

و میں سے گزرنے والے محور کے گرد

وزن کے معیار کے مساوی ہے اور اس لیے گ ک ج ۴ جب طہ کے
مساوی ہے۔

اس لیے حرکت کی مساوات ہو جاتی ہے

$$گ ک ۲ فرسہ فرت = گ ک ج ۴ جب طہ ،$$



شکل (۱۴۶)

(۲۹۹)

$$یا \quad \frac{گ^۲}{ھ} = \frac{فر۲ط}{ز۲} = ج جب ط$$

طول ل کے سادہ رقا ص کے لیے حرکت کی مساوات

$$ل = \frac{فر۲ط}{ز۲} = ج جب ط$$

ہے اور اس لیے مقابلہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ حرکت وہی ہے جو طول
 $ل = \frac{گ^۲}{ھ}$ کے سادہ رقا ص کی ہوتی ہے۔

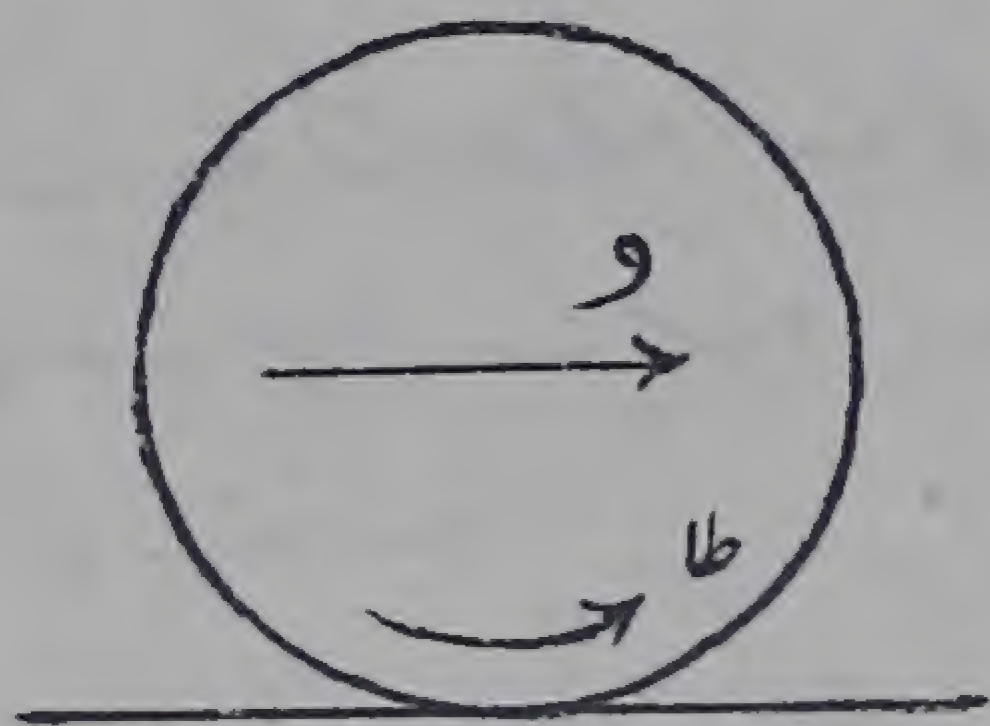
مثلاً اچھوٹے اہتر اذوں کا مکمل دور

$$\sqrt{\frac{ل}{ج}} \pi ۲ = \sqrt{\frac{گ^۲}{ج ھ}} \pi ۲$$

ہے۔

توضیحی مثال

ایک انگوٹھی ایک میز پر انتصاباً استادہ ہے اور اس کے
 ایک نقطہ پر انگلی سے بتدریج بڑھنے والا دباؤ اس طریقہ پر ڈالا گیا
 ہے کہ جس نقطہ پر انگوٹھی میز کو



شکل (۱۴۷)

مس کرتی ہے اس کے میز پر
 پھسلنے سے توازن ٹوٹتا ہے۔

انگوٹھی کی وقوع پذیر حرکت معلوم

کرو۔

مثال (۲) صفحہ ۱۵۸ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ متذکرہ صدر طریقہ پر دباؤ ڈالنا

ممکن ہے۔
فرض کرو کہ انگوٹھی جب انگلی کو چھوڑتی ہے تو یہ مشاہدہ کیا گیا کہ انگوٹھی رفتار
و کے ساتھ آگے حرکت کرتی ہے اور گردش طا کے ساتھ اس سمت کے مخالف
گھومتی ہے جس میں وہ گھومتی اگر بغیر پھسلے وہ ٹپھکتی۔ فرض کرو کہ کسی لمحہ پر رفتار اور
گردش کی قیمتیں و اور سہ ہیں جن کی پیمائش علی الترتیب و اور طا کی سمتوں میں
کی گئی ہے۔

فرض کرو کہ انگوٹھی کا نصف قطر ۱ اور کمیت ک ہے۔ اس پر عمل کرنیوالی
قوتیں حسب ذیل ہیں:

(۱) اس کا وزن ک ج

(ب) مینر کے ساتھ اس کے تعامل کا انتصابی جزو ترکیبی جو ک ج کے
مساوی ہے کیونکہ انگوٹھی کا مرکز ثقل کوئی انتصابی اسراع نہیں

رکھتا
(ج) انگوٹھی کے زیر ترین نقطہ پر فر کی تعامل جو ک ج مہ کے
مساوی ہے جب تک کہ پھسلن واقع ہوتی ہے۔
دفعہ (۱۸۰) کے مسئلہ کی رو سے

$$ک \frac{فر}{فرت} = - ک ج مہ \quad (۱)$$

ہم ایک اور مساوات دفعہ ۲۴۳ کے مسئلہ سے حاصل کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ لمحہ ت پر انگوٹھی کا جو محور ہے اس کو ہم محور لیتے ہیں۔ اس لمحہ پر
جمود کا معیار ک ۱ ہے۔ معیار حرکت کا معیار حاصل کرنے کے لیے ہم کل

حرکت کو دو حرکتوں سے مرکب سمجھتے ہیں: (۱) مرکز ثقل کی حرکت انتقال

(رفتار و) اور (۲) مرکز ثقل میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد گردش

کی حرکت (رفتار سہ)۔ اول الذکر کا کوئی اثر معیار حرکت کے معیار پر نہیں ہے

اور اس لیے معیار حرکت کا کل معیار

ک د سہ

ہے۔

چھوٹے وقفے فرت کے ختم پر انگوٹھی فاصلہ و فرت تک آگے حرکت کر چکی ہوگی اور اس لیے اب ہم ایک ایسے محور کے گرد جمود کے معیار پر غور کر رہے ہیں جو انگوٹھی کے مرکز ثقل سے فاصلہ و فرت پر ہے اور اس لیے حسب دفعہ ۲۳۵ وقفہ فرت کے بعد جمود کا معیار

ک [۱ + (د فرت)]

ہے۔

لیکن ہم دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار (فرت) کو نظر انداز کر سکتے ہیں اور جمود کے معیار کو مستقل اور ک د کے مساوی سمجھ سکتے ہیں۔ اس لیے معیار حرکت کے معیار کے اضافہ کی شرح ک د فرسہ فرت ہے۔

بیرونی قوتوں کا معیار اس محور کے گرد اور اسی سمت میں
ک ج مہ د

ہے اور اس لیے مساوات

$$(ب) \quad ک د \frac{فرسہ}{فرت} = - ک ج مہ د$$

$$(ج) \quad یا \quad د \frac{فرسہ}{فرت} = - مہ ج$$

حاصل ہوتی ہے اور مساوات (د)

$$(د) \quad فرو \frac{فرسہ}{فرت} = - مہ ج$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

ان رشتوں سے و اور سہ کے گھٹاؤ کی شرحیں حاصل ہوتی ہیں جب تک پھسلن واقع ہو رہی ہو۔ صریحاً پھسلن رک جاتی ہے جوں ہی د + سہ د = کیونکہ

و + سہ ۱، انگوٹھی کے زیر ترین نقطہ کی آگے وار رفتار ہے۔ مساواتوں (ج) اور (د) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فرت} = (و + سہ ۱) = ۲ مہ ج$$

اور ابتداً و + سہ ۱ کی قیمت و + طا ۱ ہے۔ اس لیے و + ۱ کو صفریں تحویل ہونے کے لیے وقت

$$و + طا ۱$$

$$۲ مہ ج$$

مطلوب ہے۔ اس وقفہ کے بعد پھسلن رک جاتی ہے۔ اس لمحہ پر انگوٹھی کی رفتار و حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتی ہے :

$$و = و - مہ ج \left(\frac{و + طا ۱}{۲ مہ ج} \right)$$

$$= \frac{۱}{۲} (و - طا ۱)$$

اس لیے حرکت آگے وار یا پیچھے وار ہوگی بموجب اس کے کہ ابتدائی رفتار و < یا > طا ۱۔ پھسلن ایک دفعہ رک جانے کے بعد اس کو پھر شروع کرنے کے لئے کوئی قوت نہیں ہے اور اس لیے انگوٹھی صرف یکساں رفتار و کے ساتھ لڑھکتی جائے گی۔ اگر و < طا ۱ تو وہ اپنے ابتدائی نقطہ حرکت سے دور لڑھکتی جائے گی لیکن اگر و > طا ۱ تو وہ اپنے ابتدائی نقطہ حرکت پر واپس آئے گی۔

مثالیں

(۳۰۱)

- ۱۔ ایک دروازہ کے قبضوں کا خط انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے اور دروازہ اپنے توازن کے محل کے گرد گھومتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی حرکت وہی ہے جو ایک خاص سادہ رقاص کی ہے، اس رقاص کا طول معلوم کرو۔
- ۲۔ ایک نشانہ وہاں کی ایک مربع تختی سے بنا ہے جس کا کنارہ ۱ اور

کمیت گ ہے۔ اس کے بلند ترین کنارہ پر قبضہ لگا ہوا ہے اور یہ کنارہ افقی ہے۔ نشانہ کی سکون کی حالت میں اس پر ایک گولی کی ضرب پڑتی ہے جس کی کمیت گ ہے اور جو رفتار و کے ساتھ حرکت کرتی ہوئی نشانہ کے ایک ایسے نقطہ پر لگتی ہے جو قبضوں کے خط کے نیچے گہرائی گ پر ہے۔ نشانہ کی وقوع پذیر حرکت معلوم کرو۔

۳۔ ایک متجانس کرہ کو بغیر گردش کے ایک کھردرے مائل مستوی پر پھینکا گیا ہے، مستوی کا میلان عہ ہے اور رگڑ کی قدر مہ ہے۔ ثابت کرو کہ وہ وقت جس کی اثناء میں کرہ مستوی پر چڑھتا ہے وہی ہے جو ہوتا اگر مستوی چکنا ہوتا، نیز ثابت کرو کہ وہ وقت جس میں کرہ پھسلتا ہے اس وقت کے ساتھ جس میں وہ لڑھکتا ہے نسبت ۲ : ۱ سے رکھتا ہے۔

۴۔ نصف قطر ۱ کا ایک کرہ، نصف قطرب کے ایک کروی پیالے کی مقعر سطح پر کے ایک نقطہ پر سکون کی حالت میں پکڑا گیا ہے۔ اس کو اچانک آزاد چھوڑ کر سطح پر نیچے لڑھکنے دیا گیا۔ ثابت کرو کہ ان دو کڑوں کے مرکزوں کو ملائیو خط اسی طریقہ پر جھولتا ہے جس طرح طول ہے۔ (ب۔ ۱) کا ایک سادہ رقا ص۔

۵۔ نصف قطر ۱ کے ایک کرہ کو نصف قطرب کے ایک کرہ کی کھردری محدب سطح کے بلند ترین نقطہ پر سکون کی حالت میں پکڑا گیا ہے۔ پھر اس کو آزاد چھوڑ کر اس کو کرہ کی سطح کے نیچے لڑھکنے دیا گیا۔ ثابت کرو کہ کڑے جدا ہوں گے جبکہ ان کے مرکزوں کو ملائے والا خط انصافی کے ساتھ زاویہ جم بنا لے۔

صورت ب = ۱۔ کا امتحان کرو۔

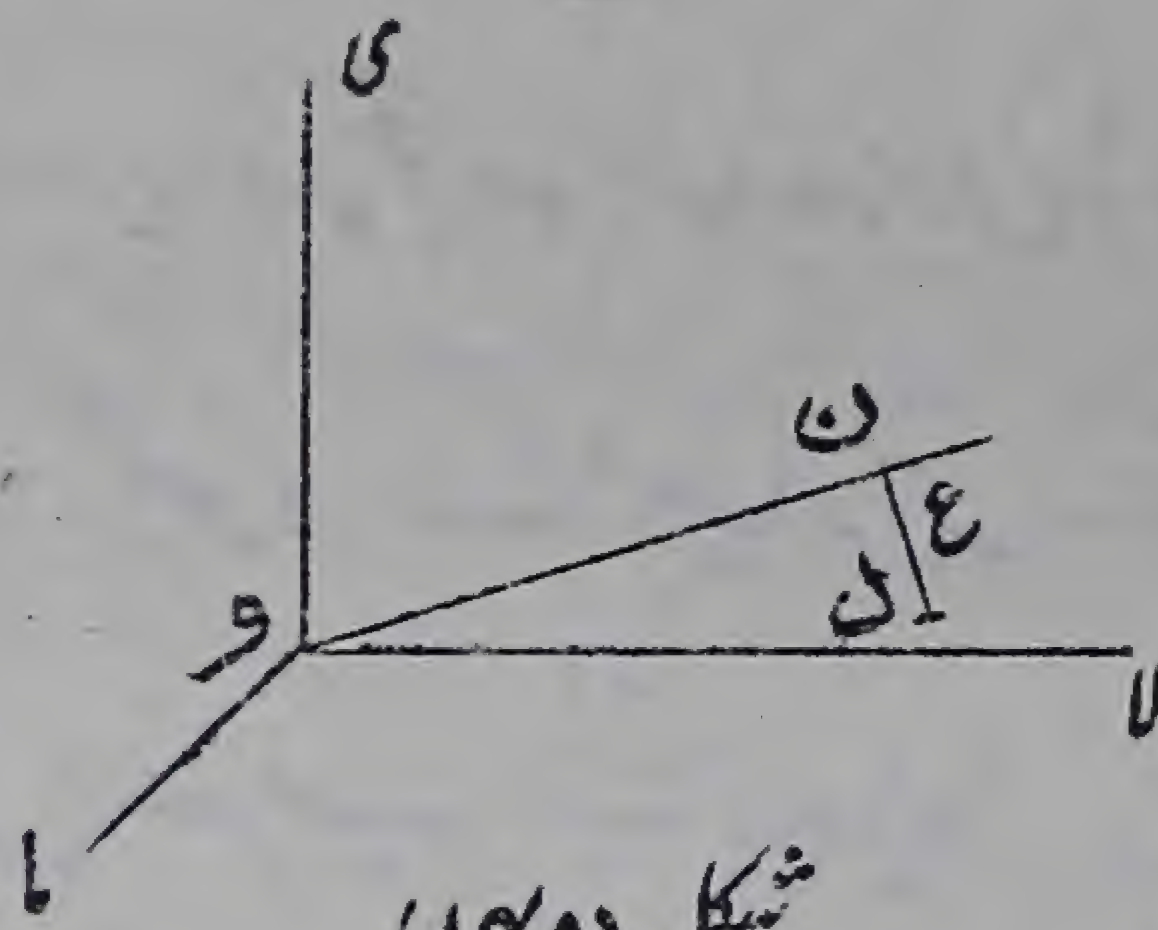
۶۔ ایک دائری حلقہ ایک چکنے افقی مستوی پر حرکت کرنے میں آزاد ہے، اس پر ایک چھوٹی انگوٹھی جس کی کمیت حلقہ کی کمیت کا $\frac{1}{n}$ واں حصہ ہے پھسلتی ہے اور ان دونوں کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہے۔ ابتداً حلقہ ساکن تھا اور انگوٹھی حلقہ کے گرد زاویہ رفتار سے کے ساتھ حرکت کر رہی تھی ثابت کرو کہ انگوٹھی وقت $\frac{n+1}{n}$ کے بعد حلقہ کے لحاظ سے ساکن ہو جائے گی۔

جمود کے معیاروں کا عام نظریہ

جمود کے سر

۲۲۶ — فرض کرو کہ ایک استوار جسم گردش کے ایک محور کے گرد گردش کر رہا ہے اور گردش کے محور کی سمتی جیوب التمام کسی تین ثابت محوروں کے حوالے سے ل، م، ن ہیں۔ فرض کرو کہ گردش کے محور پر کوئی نقطہ و مبدا لیا گیا ہے اور فرض کرو کہ ل، کیمیت کم کا کوئی ذرہ ہے جس کا فاصلہ گردش کے محور سے ع ہے۔ فرض کرو کہ ل کے محدود لا، ما، ی ہیں اور ل ن (= ع) ل سے گردش کے محور پر عمود ہے۔

(۳۰۲)



شکل (۱۴۸)

چونکہ
 $ول^۲ = لا + ما + می^۲$
 اور $ون^۲ = (ل + لا + م + ن + ی)^۲$
 اسلئے $ع^۲ = ول^۲ - ون^۲$

$$= لا + ما + می^۲ - (ل + لا + م + ن + ی)^۲$$

$$= لا(م + ن) + ما(ن + ی) + می(ل + لا) - (ل^۲ + لا^۲ + م^۲ + ن^۲ + ی^۲ + ۲للا + ۲لما + ۲لنم + ۲لان + ۲لنم + ۲لنم + ۲لانم + ۲لانم + ۲لانم)$$

$$- ۲ملا - ۲نما - ۲لنم - ۲لانم - ۲لانم - ۲لانم$$

$$= ل(ما + می) + م(لا + لی) + ن(لا + لی) - (لا^۲ + لا^۲ + م^۲ + ن^۲ + ی^۲ + ۲للا + ۲لما + ۲لنم + ۲لانم + ۲لانم + ۲لانم)$$

$$- ۲ملا - ۲نما - ۲لنم - ۲لانم - ۲لانم - ۲لانم$$

پس جمود کا معیار مساوات

$$م = ۳ک ع^۲$$

$$= \text{ل}^2 \text{ح} \text{ک} (\text{ما} + \text{ی}) + \text{م}^2 \text{ح} \text{ک} (\text{ی} + \text{لا}) + \text{ن}^2 \text{ح} \text{ک} (\text{لا} + \text{ما})$$

$$- \text{م}^2 \text{ن} \text{ح} \text{ک} \text{ما} - \text{ن}^2 \text{ل} \text{ح} \text{ک} \text{ی} \text{لا} - \text{ل}^2 \text{م} \text{ح} \text{ک} \text{لا} \text{ما}$$

$$= \text{ل}^2 (\text{ا} + \text{م}^2 \text{ب} + \text{ن}^2 \text{ج} - \text{م}^2 \text{ن} \text{د} - \text{ن}^2 \text{ل} \text{ع} - \text{ل}^2 \text{م} \text{ف})$$

(۱۲۴) -

سے حاصل ہوگا جہاں

$$1 = \text{ل}^2 \text{ح} \text{ک} (\text{ما} + \text{ی}) \text{ وغیرہ}$$

$$2 = \text{م}^2 \text{ح} \text{ک} \text{ما} \text{ وغیرہ}$$

یہ معلوم ہوگا کہ مقداریں 'ا' 'ب' 'ج' علی الترتیب محوروں 'لا' 'ما' 'ی' کے گرد جمود کے معیار ہیں۔ مقداروں 'د' 'ع' 'ف' کو جمود کے

حاصل ضرب کہتے ہیں۔

مساوات (۱۲۴) میں 'ل' 'م' 'ن' کو مختلف قیمتیں دینے سے وہیں سے گزرنے والے کسی خط کے گرد جمود کا معیار معلوم ہو سکتا ہے جب کہ چہرہ سروں 'ا' 'ب' 'ج' 'د' 'ع' 'ف' کی قیمتیں معلوم ہو جائیں۔

جمود کا ناقص نما

۲۴۶ - مساوات

ا' لا' ب' ما' ج' ی' - ۲ د' ما' ی' - ۲ ع' ی' لا' - ۲ ف' لا' ما' = گ
جہاں گ کوئی مستقل ہے ایک مخروطی نما کو تعبیر کرتی ہے کیونکہ وہ دوسرے
درجہ کی مساوات ہے۔ اگر سمتی جیوب التمام 'ل' 'م' 'ن' کا سمتی نیم قطر
رہو تو

ر (ا ل + ب م + ج ن - ۲ ع ن ل - ۲ ف ل م) = گ

یا مساوات (۱۲۴) سے

(۱۲۵)

$$\frac{ر}{م} = \frac{ک}{م}$$

(۳۰۳) چونکہ ل، م، ن کی تمام قیمتوں کے لیے م مثبت ہے اس لیے
یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سمتی نیم قطر کی تمام سمتوں کے لیے ر مثبت ہے۔ اس لیے
محروطی نما، ایک ناقص نما ہے۔
اس ناقص نما کو نقطہ و کا جمود کا ناقص نما کہتے ہیں۔
مساوات (۱۲۵) کو لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{م}{ر} = \frac{ک}{ر}$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ و میں سے گزرنے والے کسی محور کے گرد
جمود کا معیار، جمود کے ناقص نما کے متوازی سمتی نیم قطر کے ربع کے
بالعکس متناسب ہوتا ہے۔

جمود کے صدر محاور

۲۴۸ — ناقص نما کی اس طبعی خاصیت سے یہ ظاہر ہے کہ ناقص نما
خود وہی رہتا ہے خواہ محدودوں کے محور کوئی بھی منتخب کئے جائیں۔ ناقص نما
کے تین صدر محاور ہیں جو باہم علی القوائم ہیں۔ ان محوروں کی سمتوں کو نقطہ و
پر جمود کے صدر محاور کہا جاتا ہے۔
اگر نقطہ و پر کے جمود کے صدر محوروں کو محدودوں کے محور لیا جائے
تو ناقص نما کی مساوات میں مای، ی لا، لا مای کے سرعائب ہونے چاہئیں۔
اس لیے

۵ = ۴ = ۳ = ۰
پس و پر جمود کے صدر محوروں کو محدودوں کے محور لینے سے مساوات

(۱۲۴) شکل ذیل اختیار کرتی ہے:

م = ل^۱ + م^۲ + ب^۳ + ن^۴ ج
زاویہ رفتار طا کی گردش کی توانائی بالحرکت

$$\frac{۱}{۲} م طا = \frac{۱}{۲} (ل^۱ + م^۲ + ب^۳ + ن^۴ ج) طا$$

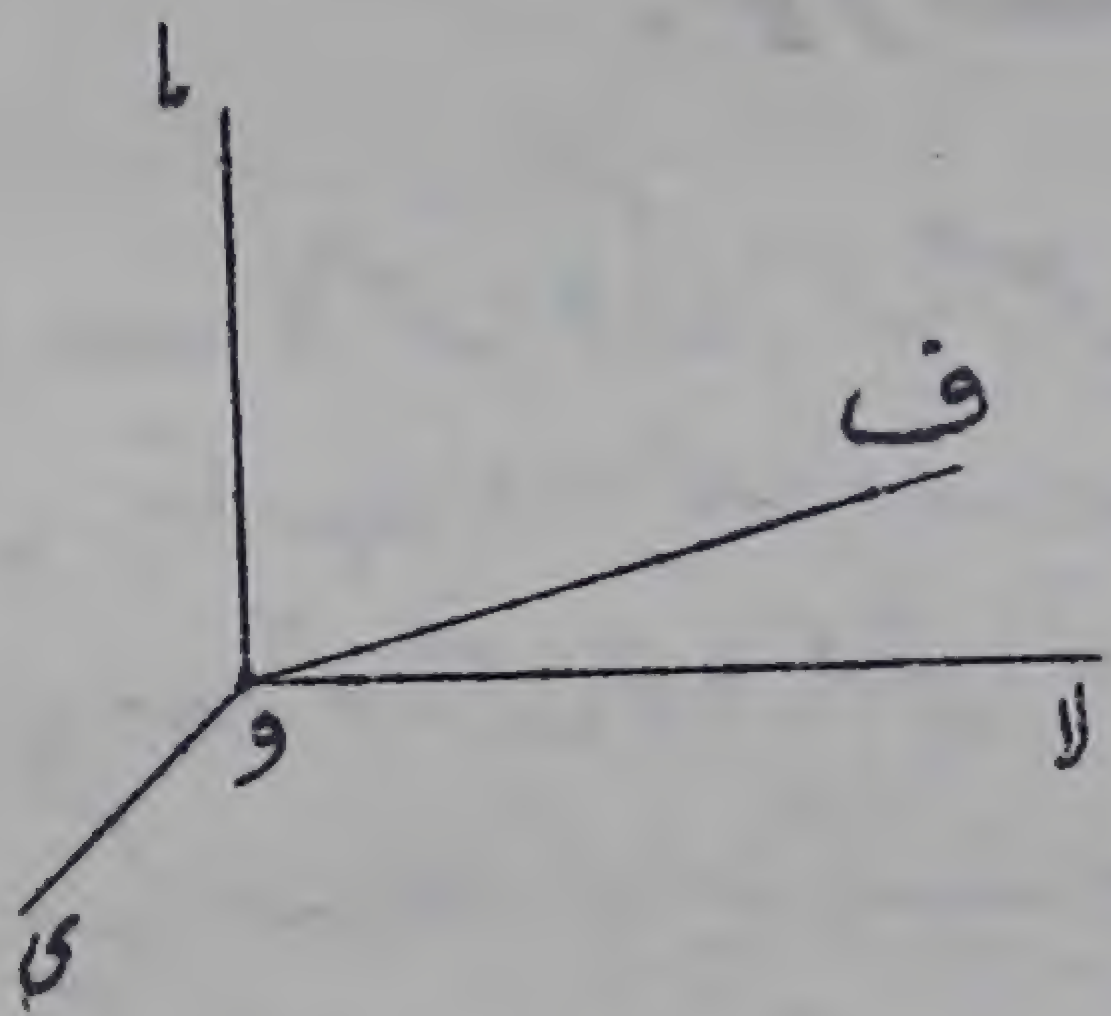
$$= \frac{۱}{۲} (ل^۱ س^۱ + ب^۲ س^۲ + ج^۳ س^۳) \quad (۱۲۶)$$

ہے جہاں طا کے اجزائے ترکیبی س^۱، س^۲، س^۳ ہیں (دیکھو دفعہ ۲۳۲)۔

اُستوار جسم کی حرکت کی عام مساواتیں

(۳۰۴)

۲۴۹ — فرض کرو کہ اُستوار جسم کا کوئی نقطہ و ہے اور فرض کرو کہ
ولا، و ما، و ی محوروں کا ایک جٹ ہے جو حرکت کرتا ہے اس طریقہ پر
کہ نقطہ و اُستوار جسم میں اپنا محل قائم رکھتا ہے اور محاور اپنے ابتدائی محل
کے متوازی رہتے ہیں۔



شکل (۱۴۹)

فرض کرو کہ و کی رفتار کے
اجزائے ترکیبی ان محوروں پر
ع، و، ط ہیں۔ ان محوروں
کے لحاظ سے اُستوار جسم کی حرکت
کسی محور و ف کے گرد جو و
میں سے گزرے گردش کی
حرکت ہوگی۔

فرض کرو کہ یہ گردش تین محوروں کے گرد گردشوں س^۱، س^۲، س^۳
سے مرکب ہے۔

فرض کرو کہ ان محوروں کے لحاظ سے اُستوار جسم کے کسی نقطہ کے

محدولاً، ما، ی ہیں۔ اُس فریم کے لحاظ سے جو و کے ساتھ حرکت کرتے و کے
محوروں سے فراہم ہوتا ہے نقطہ لا، ما، ی کی رفتار کے اجزائے ترکیبی

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} ، \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} ، \frac{\text{فری}}{\text{فرت}}$$

ہیں اور فضا میں اس فریم کی رفتار کے اجزائے ترکیبی

ہیں۔ اس لیے نقطہ لا، ما، ی کی کل رفتار کے اجزائے ترکیبی

$$+ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} ، + \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} ، + \frac{\text{فری}}{\text{فرت}}$$

ہیں۔ فرض کرو کہ کسی لمحہ پر محوروں لا، ما، ی کے گرد بیرونی قوتوں کے
معیاروں کے مجموعے علی الترتیب ل، م، ن سے تعبیر ہوتے ہیں
تو حسب دفعہ (۲۴۳)

نقطہ لا، ما، ی پر کمیت ک کے ذرہ کے معیار حرکت کا معیار محور لا
کے گرد

$$ک [ما (ط + \frac{\text{فری}}{\text{فرت}}) - ی (و + \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}})]$$

ہے۔ پس دفعہ (۲۴۳) کے مسئلہ کی رو سے

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} ک [ما (ط + \frac{\text{فری}}{\text{فرت}}) - ی (و + \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}})] = ل (۱۲۴) (۳۰۵)$$

علیٰ ہذا دوسرے محوروں کے لیے مشابہ مساواتیں ہیں۔

۲۵۰۔ محدودوں کے متحرک محوروں کے لحاظ سے ذرہ ک کے
محدولاً، ما، ی ہیں اور اس لیے ولا کے گرد گردش سے لا سے ذرہ کی
جو رفتار حاصل ہوتی ہے اُس کے اجزائے ترکیبی

۔ ۔ ۔ سہ لای ۔ سہ ما

ہیں ۔

اسی طرح گردنوں سہ ، سہ ی سے جو رقعاتیں حاصل ہوتی ہیں ان کے اجزائے ترکیبی

سہ ی ، ۔ ۔ سہ لا

۔ سہ ی ما ، سہ ی لا ۔

اور

ہیں ۔

ان رقعاتوں کو مرکب کرنے سے حاصل رقعات کے اجزائے ترکیبی متذکرہ محوروں کے لحاظ سے حسب ذیل حاصل ہوتے ہیں :

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فرت}} = \text{سہ ی} - \text{سہ ما}$$

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فرت}} = \text{سہ ی لا} - \text{سہ ی}$$

$$\frac{\text{فر ی}}{\text{فرت}} = \text{سہ لا} - \text{سہ ما}$$

اس طرح

$$\text{ما} \frac{\text{فر ی}}{\text{فرت}} - \text{ی} \frac{\text{فر ما}}{\text{فرت}} = \text{سہ} (\text{ما} + \text{ی}) - \text{سہ لا} - \text{سہ لای}$$

اور ت کے لحاظ سے اس مساوات کو تفریق کرنے پر مساوات (۱۲۷) کے دائیں جانبی رکن کے ایک حصہ کی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے :

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} \text{ ح ک} (\text{ما} \frac{\text{فر ی}}{\text{فرت}} - \text{ی} \frac{\text{فر ما}}{\text{فرت}})$$

$$= \text{ح ک} (\text{ما} + \text{ی}) \frac{\text{فر سہ}}{\text{فرت}} - \text{ح ک لا} \frac{\text{ما فر سہ}}{\text{فرت}} - \text{ح ک لای} \frac{\text{فر سہ}}{\text{فرت}}$$

$$- \text{ح ک مای} (\text{سہ} - \text{سہ ی}) + \text{ح ک} (\text{ما} - \text{ی}) \text{سہ سہ ی}$$

- ح ک ی لاسہ سہ + ح ک لا ماسہ سہ

$$= \frac{ا فرسہ}{فرت} - \frac{ف فرسہ}{فرت} - \frac{ع فرسہ}{فرت}$$

- د (سہ - سہ) - (ب - ج) سہ سہ - ع سہ سہ

+ ف سہ سہ

۲۵۱ - فرض کرو کہ استوار جسم کے مرکز ثقل کے محدود لا، ما، ی ہیں (۳۰۶)

اور اس کی کل کمیت گ ہے۔ اب

ح ک لا = گ لا، وغیرہ
اس لیے مساوات (۱۲۷) کے دائیں جانبی رکن کے بقیہ حصہ کی قیمت حسب ذیل ہے:

$$\frac{فرت}{ح ک} (ماط - ی و) = \frac{فرت}{(ک ماط - ک ی و)}$$

$$= \frac{فرت}{ک} (ماط - ی و)$$

پس مساوات (۱۲۷) حسب ذیل شکل اختیار کرتی ہے:

$$ک \frac{فرت}{(ماط - ی و)} + \frac{ا فرسہ}{فرت} - \frac{ف فرسہ}{فرت}$$

$$- \frac{ع فرسہ}{فرت} - د (سہ - سہ) - (ب - ج) سہ سہ$$

$$- ع سہ سہ + ف سہ سہ = ل (۱۲۸)$$

اگر محوروں پر کل اجزائے ترکیبی ح لا، ح ما، ح مے سے

تعبیر ہوں تو دفعہ (۱۸۰) کی رو سے حسب شکل ذیل مزید مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:

$$ک \text{ فرض } = (ع + \frac{\text{فر لا}}{\text{فرت}}) = ۷۳ \quad (۱۲۹)$$

مساواتیں (۱۲۸) اور (۱۲۹) اور ان کے متناظر دوسرے دو محوروں کے لحاظ سے مساواتوں کے دو دوسرے زوج ایک استوار جسم کی حرکت کی مساواتیں ہیں جبکہ یہ جسم کسی قوتوں کے تحت حرکت کر رہا ہو۔

یولر کی مساواتیں

۲۵۲۔ اب فرض کرو کہ محوروں کا ایک دوسرا جٹ ہے جس کو ہم '۳'، '۲'، '۱' سے تعبیر کریں گے۔ فرض کرو کہ یہ محور حرکت کرتے ہیں اس طور پر کہ ان کا محل استوار جسم میں ہمیشہ وہی رہتا ہے، نقطہ و (جس کے متعلق ہم فرض کر چکے ہیں کہ وہ ہمیشہ استوار جسم میں ایک ہی محل پر قائم رہتا ہے) ان محوروں کا مبداء ہے۔ فرض کرو کہ زیر بحث لمحہ پر محاورا '۳'، '۲'، '۱' محوروں 'لا'، 'ما'، 'ی' پر منطبق ہوتے ہیں۔ تب محوروں '۳'، '۲'، '۱' کے حوالے سے جمود کے سروں کی جو قیمتیں حاصل ہوں گی وہ وہی ہونگی جو محوروں 'لا'، 'ما'، 'ی' کے حوالے سے حاصل ہوئی تھیں یعنی 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ع'، 'ف'۔ مزید بریں وہ تمام رفتاریں جن کا حوالہ محوروں '۳'، '۲'، '۱' کے ذریعہ دیا گیا ہو وہی قیمتیں رکھیں گی جو وہ رکھتیں اگر ان کا حوالہ محوروں 'لا'، 'ما'، 'ی' سے دیا جاتا۔ فرض کرو کہ محوروں '۳'، '۲'، '۱' کے گرد گردشیں 'سم'، 'سم'، 'سم' ہیں تو زیر بحث لمحہ پر ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{سم} = \text{لا} \text{ سم} = \text{ما} \text{ سم} = \text{سمی}$$

اس کا کسی لمحہ پر درست ہونا ضروری نہیں ہے الا اُس لمحہ کے جس پر محور منطبق ہوتے ہیں اور اس لیے وقت کے لحاظ سے ان مساواتوں کا

تفرق کرنا اور اس سے

$$\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} \text{ وغیرہ}$$

اخذ کرنا درست نہیں ہے۔ تاہم یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ آخری نتیجہ زیر بحث لمحہ پر درست ہے۔ فرض کرو کہ و میں سے گزرنے والا کوئی خط وق سے تعبیر ہوتا ہے، فرض کرو کہ محوروں ۱، ۲، ۳ کے لحاظ سے اس خط کی سمتی جیوب التمام جم ع، جم بہ، جم جہ ہیں اور فرض کرو کہ وق کے گرد زاویہ رقتار کا جزو ترکیبی طاق ہے۔ اگر ایک محور وف کے گرد جیوب التمام جیوب التمام محوروں ۱، ۲، ۳ کے حوالے سے ل، م، ن ہیں حال زاویہ رقتار کی مقدار طاق ہو تو

$$\text{طاق} = \text{طا جم ف وق}$$

$$= \text{طا (ل جم ع + م جم بہ + ن جم جہ)}$$

خط وق خواہ کوئی ہو یہ مساوات ہمیشہ درست ہوگی، اس لیے ہم اس کو وقت کے لحاظ سے تفرق کر سکتے ہیں اور اس طرح حاصل کرتے ہیں

$$\frac{\text{فرطاق}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} \text{ جم ع} + \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} \text{ جم بہ} + \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} \text{ جم جہ}$$

$$- \text{سم جب ع} \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرت}} - \text{سم جب بہ} \frac{\text{فر بہ}}{\text{فرت}} - \text{سم جب جہ} \frac{\text{فر جہ}}{\text{فرت}}$$

(۱۳۰)

اب فرض کرو کہ خط وق، ولا پر منطبق ہوتا ہے تو طاق = سم۔

زیر بحث لمحہ بہ = جہ = $\frac{\pi}{4}$ ع۔۔۔ نیز $\frac{\text{فر بہ}}{\text{فرت}}$ وہ شرح ہے جس سے

ولا اور محور اکا درمیانی زاویہ بڑھتا ہے اور صریحاً یہ سم ہے۔

$$\text{اسی طرح} \frac{\text{فر جہ}}{\text{فرت}} = - \text{سم}، \text{اور} \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرت}} = -$$

(۳۸)

ان تمام اندراجات کو عمل میں لانے سے ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ زیر بحث لمحہ پر جس پر محوروں کے یہ دو جٹ ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں مساوات (۱۳۰) شکل

$$\frac{\text{فرسہ لا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرسہ ا}}{\text{فرت}} - \text{سم} \times \text{سم} + \text{سم} \times \text{سم}$$

$$\frac{\text{فرسہ ا}}{\text{فرت}} =$$

اختیار کرتی ہے۔ پس زیر بحث لمحہ پر رشتے

$$\text{سم لا} = \text{سم} \times \text{وغیرہ}$$

$$\text{اور نیز} \quad \frac{\text{فرسہ لا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرسہ ا}}{\text{فرت}} \times \text{وغیرہ}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

اب فرض کرو کہ مبداء یا تاو ایک ثابت نقطہ ہے یا جسم کا مرکز ثقل۔ پہلی صورت میں

$$۶ = ۵ = ۴ = ۳ \text{ ہمیشہ}$$

دوسری صورت میں

$$\text{لا} = \text{ما} = \text{تا} = ۳ \text{ ہمیشہ}$$

نیز فرض کرو کہ حوالے کے محور 'جمود' کے صدر محور منتخب کئے گئے ہیں جو مبداء میں سے گزرتے ہیں تو

$$۵ = ۴ = ۳ = ۲$$

یہ تمام اندراجات مساوات (۱۲۸) اور اس کے مشابہ دو مساواتوں میں کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساواتیں شکل

$$\text{ا} \quad \frac{\text{فرسہ ا}}{\text{فرت}} - (\text{ج} - \text{سم}) \text{سم} = \text{ل} \quad (۱۳۱)$$

$$\text{ب} \quad \frac{\text{فرسہ ب}}{\text{فرت}} - (\text{ج} - \text{ا}) \text{سم} = \text{ه} \quad (۱۳۲)$$

ج $\frac{\text{فرسہ}}{\text{وزت}} - (ا - ب) \text{ سم} = ن$ (۱۳۳)

اختیار کرتی ہیں۔ ان مساواتوں کو یوں لے کر مساواتیں کہا جاتا ہے۔

سیارہ کی گردش

(۳۰۹)

۲۵۳۔ ان مساواتوں کے استعمال کی پہلی مثال کے طور پر فرض کرو کہ ہم ایک استوار جسم کی حرکت کا امتحان کرتے ہیں جو ایک محور کے گرد متشاکل ہے اور ایسی قوتوں کے زیر عمل ہے جو سب کی سب مرکز ثقل میں سے گذرتی ہیں۔ یہ شرطیں تقریبی طور پر ان شرطوں کو تعبیر کرتی ہیں جو حاصل ہوتی ہیں جب کہ ایک سیارہ اپنے مدار میں حرکت کرتا ہے یا ایک ستارہ فضاء میں حرکت کرتا ہے۔

فرض کرو کہ ہم مرکز ثقل کو مبداء اور متشاکل کے محور کو محور ا لیتے ہیں۔ فرض کرو کہ جمود کے معیار 'ا'، 'ب' ہیں۔ تب حرکت کی مساواتیں ہیں:

ا $\frac{\text{فرسہ}}{\text{وزت}} = .$ (۱۳۴)

ب $\frac{\text{فرسہ}}{\text{وزت}} = (ب - ا) \text{ سم} =$ (۱۳۵)

ب $\frac{\text{فرسہ}}{\text{وزت}} = - (ب - ا) \text{ سم} =$ (۱۳۶)

پہلی مساوات سے سم کا مستقل ہونا فوراً معلوم ہو جاتا ہے۔ فرض کرو کہ وہ طا کے مساوی ہے۔ اب اگر ہم لکھیں

گ $= \frac{ب - ا}{ب} \text{ طا}$

توساواتیں (۱۳۵) اور (۱۳۶) ہو جاتی ہیں

(۱۳۷) $\frac{\text{فرسہ ۲}}{\text{فرت}} = \text{گ سہ ۲}$

(۱۳۸) $\frac{\text{فرسہ ۳}}{\text{فرت}} = \text{گ سہ ۳}$

اس طرح $\frac{\text{فرسہ ۲}}{\text{فرت}} = \text{گ سہ ۲}$ اور اس کا حل ہے

$\text{سہ ۲} = \text{ع جم (گ ت + صہ)}$ اور مساوات (۱۳۷) سے اب حاصل ہوتا ہے

$\text{سہ ۳} = \text{ع جب (گ ت + صہ)}$ اس لیے لمحہ ت پر زاویہ رفتار کے اجزائے ترکیبی

طا، ع جم (گ ت + صہ) - ع جب (گ ت + صہ) ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ گردش کا محور ایک مخروطی قسم کرتا ہے اور اس کا دور (۱۳۹)

$\frac{\pi^2}{\text{گ}} \text{ یا } \frac{\pi^2}{\text{طا}} \text{ ب - ۲} \text{ ہے -}$

اگر ب، (سے بہت قریب ہو تو دور بہت بڑا ہو سکتا ہے اور اس لیے حرکت بہت سست ہوگی۔ یہ زمین کی صورت میں واقع ہوتا ہے گردش کے محور کی حرکت وہ منظر پیدا کرتی ہے جس کو عرض بلد کا تغیر کہتے ہیں

اور اس کا دور تقریباً ۴۲۸ یوم ہے۔ چونکہ دور $\frac{\pi^2}{\text{طا}}$ تقریباً ایک یوم کو

تغیر کرتا ہے اس لیے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ زمین کے لیے $\frac{\text{ب - ۲}}{\text{ب}}$ کا

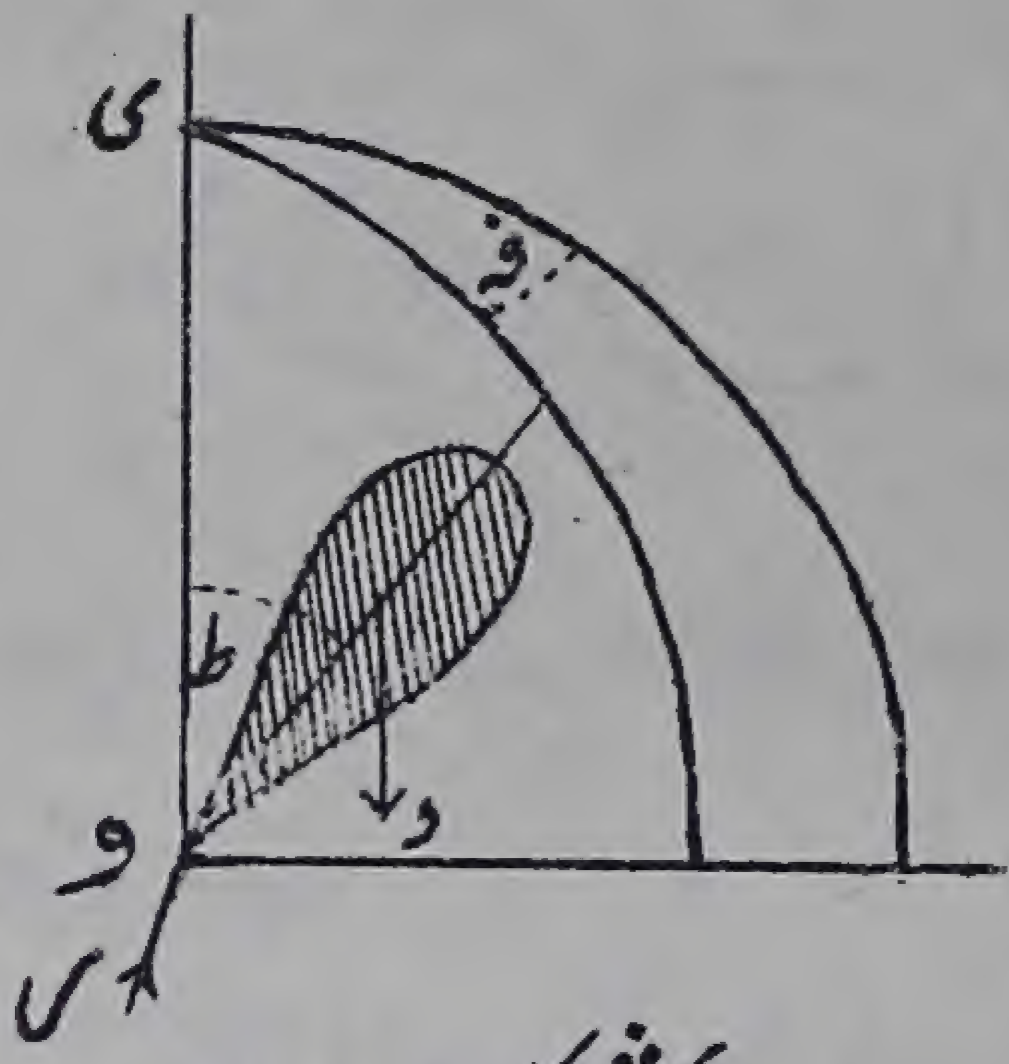
رتبہ $\frac{۱}{۴۲۸}$ ہے -

اس مقدار کی صحیح قیمت ۳۲۸.۰۰۰ ہے، یہ تناقص زمین کی نامکمل استواریت

کا نتیجہ ہے۔

لٹو کی حرکت

۲۵۴۔ اس باب کے طریقوں کی دوسری مثال کے طور پر فرض کرو کہ ہم ایک گھومتے ہوئے لٹو کی حرکت پر غور کرتے ہیں۔ ہم فرض کریں گے کہ لٹو ایک گردشی مجسم ہے جو ایک کیل پر گھوم رہا ہے جس کی نوک ایک نقطہ ہے اور کیل اور اس سطح کے درمیان تماس جس پر وہ ٹکا ہوا ہے پھسلن کو روکنے کے لیے کافی



شکل (۱۵۰)

کھردرا ہے۔ پس نقطہ تماس ایک ثابت نقطہ ہے۔ فرض کرو کہ ہم فضا میں ثابت محور 'و'، 'ما'، 'و' لیتے ہیں جن میں محوری انتصابی ہے اور نیز فرض کرو کہ جسم میں ثابت محور ۱، ۲، ۳ ہیں جو 'و' میں سے

گذرنے والے جمود کے صدر محوروں پر منطبق ہوتے ہیں۔ فرض کرو کہ محور ۱، لٹو کا تشاکل کا محور ہے اور فرض کرو کہ محوروں ۱، ۲، ۳ کے گرد جمود کے معیار 'ا'، 'ب'، 'ب' ہیں۔

یولر کی مساواتوں میں سے پہلی مساوات ہو جاتی ہے

$$۱ = \frac{\text{فرسہ}}{\text{وزن}}$$

کیونکہ 'ب' = 'ج' اور 'ل' = .. اس طرح 'سم' مستقل ہے، فرض کرو کہ وہ 'طا' کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ لٹو کا محور اس اکائی کرہ کو جو 'و' کے گرد گھینچا گیا ہے ایک

نقطہ پر قطع کرتا ہے جس کے قطبی محدودا طہ ' فہ ہیں جہاں طہ وہ زاویہ ہے جو امتضابی اور لٹو کے محور کے درمیان ہے۔
(۳۱۱) لٹو کی توانائی بالحرکت بموجب دفعہ (۲۴۸)

$$\frac{1}{2} [ا ط ا + ب (سہ^۲ + سہ^۲)]$$

ہے اور توانائی بالقوہ گ ج مہ جم طہ ہے جہاں مہ وہ فاصلہ ہے جو لٹو کے مرکز ثقل اور و کے درمیان ہے۔ اس طرح توانائی کی مساوات ہے

$$ا ط ا + ب (سہ^۲ + سہ^۲) + ۲ ک ج مہ جم طہ = ع (۱۳۹)$$

جہاں ع ایک مستقل ہے۔ اس کو ایک مختلف شکل میں رکھا جاسکتا ہے۔ کیونکہ سہ^۲ + سہ^۲ ، لٹو کے محور کی زاویہ رفتار کا مربع ہے اور اس لیے اکائی کرہ پر کے نقطہ ا طہ ' فہ کی حقیقی رفتار کا مربع ہے اور اس لیے حاصل ہوتا ہے

$$سہ^۲ + سہ^۲ = \left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{وقت}} \right)^۲ + جب^۲ طہ \left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{وقت}} \right)^۲$$

توانائی کی مساوات اب شکل

$$ا ط ا + ب [ا \left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{وقت}} \right)^۲ + جب^۲ طہ \left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{وقت}} \right)^۲]$$

$$+ ۲ ک ج مہ جم طہ = ع (۱۴۰)$$

اختیار کرتی ہے۔

ہم ایک تیسری مساوات اس واقعہ سے حاصل کر سکتے ہیں کہ انتضابی محور و ی کے گرد زاویہ معیار حرکت مستقل ہے۔ اس زاویہ معیار حرکت کو (ا) معیار حرکت جو محور ا کے گرد گردش طہ کی وجہ سے ہے، اور (ب) معیار حرکت جو لٹو کے محور کی حرکت کی وجہ سے ہے

کا مرکب خیال کیا جاسکتا ہے۔
محور ۱ کے گرد گردش ط ۱ کو پھر گردشوں ط ۱ جب ط ۱، ط ۱ جم ط ۱ میں
تخلیل کیا جاسکتا ہے جو علی الترتیب افقی اور انتصابی کے گرد ہیں، ان
گردشوں سے معیار حرکتوں کے معیار افقی اور انتصابی کے گرد
ط ۱ ط ۱ جب ط ۱، ط ۱ ط ۱ جم ط ۱ حاصل ہوتے ہیں۔ اس لیے معیار حرکت
کا معیار جو حصہ (۱) سے شامل ہوتا ہے ط ۱ جم ط ۱ ہے۔
لہٰذا محور کی حرکت کو دو گردشوں میں تحلیل کیا جاسکتا ہے:

- (۱) زاوی رفقار جب ط ۱ $\frac{\text{فرقہ}}{\text{وقت}}$ کی گردش جو اس محور کے
گرد ہے جو انتصابی کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{2}$ - ط ۱ بناتا ہے،
(۲) زاوی رفقار $\frac{\text{فرقہ}}{\text{وقت}}$ کی گردش جو ایک افقی محور کے گرد ہے۔ (۳۱۲)

اول الذکر (۱) کو انتصابی کے گرد گردش جب ط ۱ $\frac{\text{فرقہ}}{\text{وقت}}$ اور ایک افقی
محور کے گرد گردش جب ط ۱ جم ط ۱ $\frac{\text{فرقہ}}{\text{وقت}}$ میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔
اس لیے حرکت کے حصہ (ب) سے انتصابی کے گرد جو معیار حرکت کا
معیار شامل ہوتا ہے وہ

$$\text{ب جب ط ۱} \frac{\text{فرقہ}}{\text{وقت}}$$

ہے اور چونکہ انتصابی کے گرد معیار حرکت کا معیار ایک مستقل قیمت
رکھتا ہے اس لیے فرض کرو کہ یہ مستقل گ ہے تو

$$\text{ط ۱ جم ط ۱} + \text{ب جب ط ۱} \frac{\text{فرقہ}}{\text{وقت}} = \text{گ} \quad (۱۴۱)$$

اگر ہم $\frac{\text{فرقہ}}{\text{وقت}}$ کو اس مساوات اور مساوات (۱۴۰) سے ساقط

کریں تو حاصل ہوتا ہے

$$ب جب ط [ا ط + ب (\frac{فرط}{وزت}) + ۲ گ ج ۷ جم ط - ۶]$$

$$+ (گ - ا ط + جم ط) = ۰$$

(۱۴۲)

اس مساوات سے ط کی قیمت کے تغیرات حاصل ہوتے ہیں اور اس لیے انتصابی کے ساتھ لو کے محور کے میلان میں جو تبدیلیاں ہوتی ہیں ان کو ہم معلوم کر سکتے ہیں۔

$$ط کی اعظم اور اقل قیمتیں = \frac{فرط}{وزت} . رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں$$

اور اس لیے یہ قیمتیں مساوات

$$ب (۱ - جم ط) [ا ط + ۲ گ ج ۷ جم ط - ۶]$$

$$+ (گ - ا ط + جم ط) = ۰$$

(۱۴۳)

کی اصلیں ہیں۔

فرض کرو کہ اس مساوات کی دائیں جانب کو ہم ف (جم ط) سے تعبیر کرتے ہیں۔ اب چونکہ ف تیسرے درجہ کا ایک تفاعل ہے اس لیے جم ط کی تین اصلیں ہوں گی۔ فرض کرو کہ لو کو زاویہ ط = ط پر چلایا گیا

$$ہے اور \frac{فرط}{وزت} کی قیمت (\frac{فرط}{وزت}) کے مساوی ہے۔ تب مساوات$$

(۱۴۲) سے

$$ب جب ط [ا ط + ب (\frac{فرط}{وزت}) + ۲ گ ج ۷ جم ط - ۶]$$

$$+ (گ - ا ط + جم ط) = ۰$$

$$اور اس لیے ف (جم ط) = ب جب ط [ا ط + ۲ گ ج ۷ جم ط - ۶]$$

$$+ (گ - (طا جم طه) = - ب^2 جب^2 طه) (فرطه)$$

اس لیے ف (جم طه) منفی ہے۔ ہم آسانی سے مساوات (۱۲۳) سے معلوم (۳۱۳) کرتے ہیں کہ

$$ف (۱) = (گ - (طا))$$

اس لیے ف (۱) مثبت ہے۔

$$ف (-۱) = (گ + (طا))$$

اس لیے ف (-۱) مثبت ہے اور

$$ف (\infty) = -۲ گ ج ص ب (\infty +)$$

جو منفی ہے۔ اس طرح ہم دیکھ چکے ہیں کہ

جب 'جم طه' = ∞ تو ف (جم طه) منفی ہے،

جب 'جم طه' = ۱ تو ف (جم طه) مثبت ہے،

جب 'جم طه' = جم طه تو ف (جم طه) منفی ہے،

جب 'جم طه' = -۱ تو ف (جم طه) مثبت ہے۔

اس لیے کبھی ف (جم طه) = کی تین اصلیں حسب ذیل طریقہ پر

واقع ہوتی ہیں:

ایک اصل طه = طه، جو جم طه = ۱ اور جم طه = جم طه کے درمیان ہے

ایک اصل طه = طه، جو جم طه = جم طه اور جم طه = -۱ کے درمیان ہے

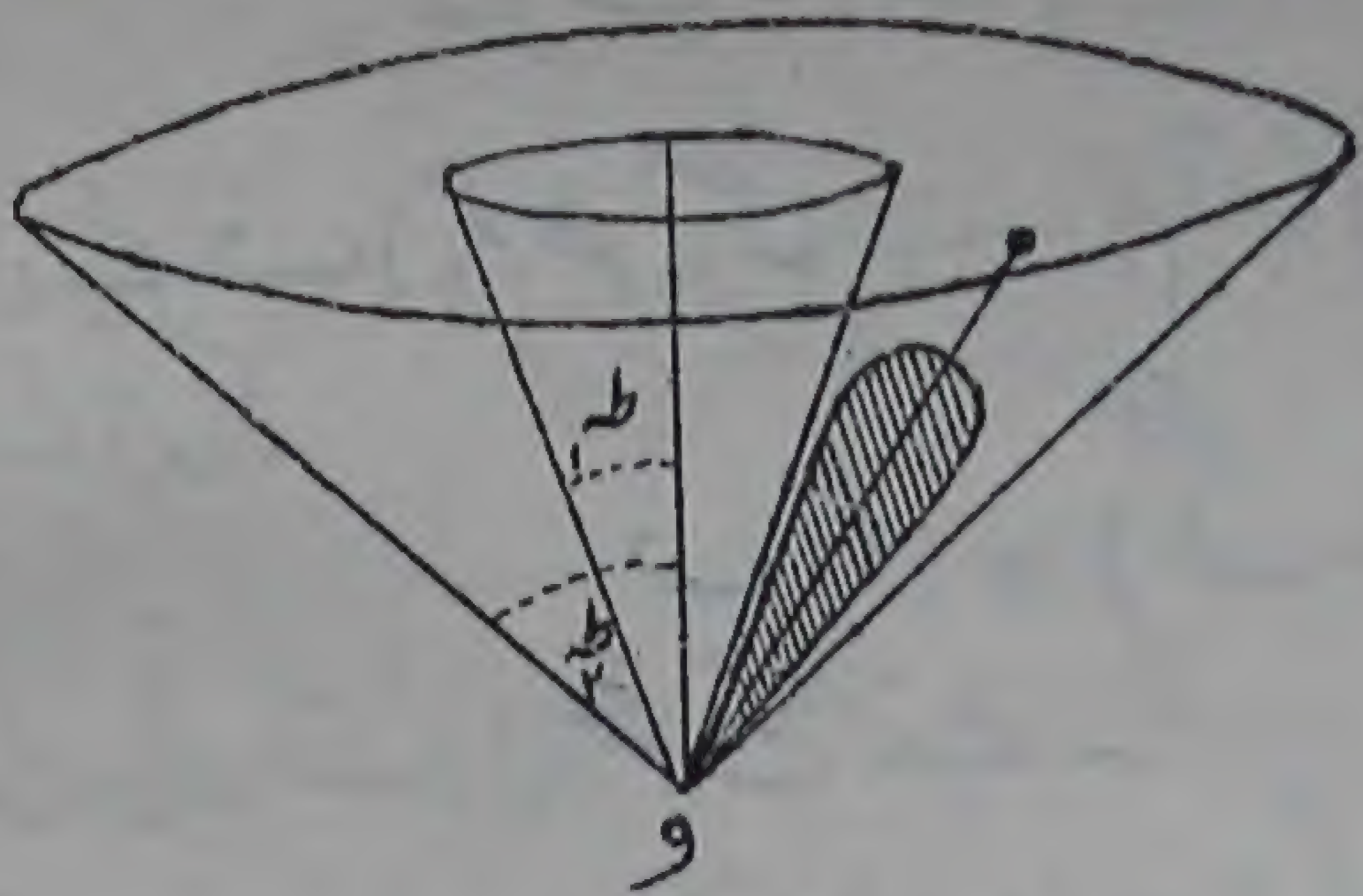
ایک اصل وہ ہے جس کے لیے جم طه عدد اکائی سے بڑا ہے

اور اس لیے طه کی کوئی حقیقی قیمت حاصل نہیں ہوتی۔

اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ وہ نقطے جن پر $\frac{فرطه}{وزت}$ معدوم ہو سکتا ہے

صرف طه = طه، اور طه = طه ہیں۔ ان نقطوں پر $\frac{فرطه}{وزت}$ معدوم ہوتا ہے

اور چونکہ ان میں سے کسی نقطہ پر مساوی اصلیں نہیں ہیں اس لیے



شکل (۱۵۱)

فرطہ $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ ان نقطوں پر پہنچ کر
علامت تبدیل کرتا ہے اور اس لیے
طہ، صرف قیمتوں طہ، اور طہ،
کے درمیان تبدیل ہو سکتا ہے۔
پس لٹوکا محور دو مخروطوں
طہ = طہ، اور طہ = طہ کے
درمیان بہتر از کرتا ہے۔

۲۵۵ — فرض کرو کہ ہم وہ کم سے کم زاوی معیار حرکت معلوم کرنا چاہتے
ہیں جو لٹوکا ہونا چاہئے تاکہ وہ بغیر گریڈز کے گھومتا رہے۔ اس کے لیے
ہم مان سکتے ہیں کہ لٹو گرے گا اگر کبھی طہ، ایک خاص حد طہ سے تجاوز
کرے خواہ اس کا گرتا کیل کے پھسلنے سے یا اس کا پہلو زمین کو سس کرنے
سے وقوع پذیر ہوا ہو۔ وہ شرط کہ لٹو گر نہ پڑے یہ ہے کہ طہ کو طہ سے
کم ہونا چاہئے اور اس لیے ف (جم طہ) کو مثبت ہونا چاہئے۔ اسلئے
ع، گ، اور طا کی قیمتیں ایسی ہونی چاہئیں کہ

(۳۱۴)

$$\text{ب جب طہ} = (\text{طا} + \text{ک ج جم طہ} - \text{ع}) + (\text{گ} - \text{طا جم طہ})$$

مثبت ہو۔

فرض کرو کہ لٹو کو انتصابی کے ساتھ میلان طہ پر ابتدا گھمایا گیا ہے اور
لٹو اپنے محور کے گرد گردش طا کے سوا کوئی اور حرکت نہیں رکھتا۔ اب
مساواتوں (۱۴۰) اور (۱۴۱) سے

$$\begin{aligned} \text{ع} &= \text{طا} + \text{ک ج جم طہ} \\ \text{گ} &= \text{طا جم طہ} \end{aligned}$$

اس طرح

$$\text{ف (جم طہ)} = \text{ب جب طہ} = (\text{طا} + \text{ک ج جم طہ} - \text{ع})$$

+ (گ - ا ط ا جم طہ ۳)

$$= ب جب ا طہ \times ۲ گ ج ۳ (جم طہ - جم طہ) + (ا ط ا جم طہ - جم طہ) ۱$$

$$= (جم طہ - جم طہ) [۲ گ ج ۳ ب جب ا طہ + (ا ط ا جم طہ - جم طہ)]$$

(۱۴۴).....

چونکہ لٹو کو ایک ایسے محل میں ضرور چلایا گیا ہے جس میں وہ گھوم سکتا ہے
اس لیے جم طہ - جم طہ کی قیمت ضرور منفی ہے۔ اس لیے ف (جم طہ)
کے مثبت ہونے کے لیے

$$ا ط ا (جم طہ - جم طہ) - ۲ گ ج ۳ ب جب ا طہ (۱۴۵)$$

کو مثبت ہونا چاہئے یا

$$ا ط ا < \frac{۲ گ ج ۳ ب جب ا طہ}{ا (جم طہ - جم طہ)} \quad (۱۴۶)$$

ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ا بہت چھوٹا ہے تو ط ا کی وہ قیمت جو لٹو کو
گرنے سے بچانے کیلئے مطلوب ہے بہت بڑی ہے۔ اس لیے چھوٹی عمودی تراش
کے لٹو کو گھمانا بہت مشکل ہے مثلاً سیسے کی پینسل یا نوکدار تار کو۔

اگر ہم اس زاویہ کا انتخاب کر سکیں جس پر لٹو گھومنا شروع کرتا ہے
تو گویا جم طہ اختیاری ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ط ا کی مطلوبہ قیمت کم سے
کم ہوگی جبکہ جم طہ اعظم ہو یعنی جبکہ لٹو کو انتصاً یا گھمایا گیا ہو۔ اس صورت
میں لٹو گھومے گا اگر

(۳۱۵)

$$ا ط ا < \frac{۲ گ ج ۳ ب جب ا طہ}{ا (۱ - جم طہ ۳)}$$

$$یا اگر ا ط ا < \frac{۲ گ ج ۳ ب (۱ + جم طہ ۳)}{ا}$$

۲۵۶۔ بالعموم اگر لٹو انتصاباً گھومنے کی ابتدا کرے اور اس کے محور کے گرد خالص گردش کے سوا کوئی اور رفتار نہ ہو تو مساوات (۱۴۴) میں جم طہ = ۱ رکھنے پر حاصل ہوتا ہے

$$ف (جم طہ) = (۱ - جم طہ) [۱ طہ - ۲ گ ج ص ب (۱ + جم طہ)]$$

مساوات ف (جم طہ) = کی اصلیں ہیں

$$جم طہ = ۱ + ۱ + ۱ - \frac{۱ طہ}{۲ گ ج ص ب} - ۱$$

فرض کرو کہ ہم لکھتے ہیں

$$طہ = \frac{۲ گ ج ص ب}{۱}$$

تو جب طہ = طہ تو اصلیں حاصل ہوتی ہیں

$$جم طہ = ۱ + ۱ + ۱$$

اور جب طہ کے طہ تو تیسری اصل اکائی سے بڑی ہے اور جب طہ طہ تو تیسری اصل اکائی سے کم ہے فرض کرو جم طہ = جم طہ جہاں طہ ایک حقیقی زاویہ ہے جو مساوات

$$جم طہ = \frac{۱ طہ}{۲ گ ج ص ب} - ۱ = ۱ - \frac{۲ (طہ - طہ)}{طہ} \quad (۱۴۴)$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

پس جب تک طہ طہ انتہا زات منطبق حدود طہ = . اور طہ = . کے درمیان مقید رہتے ہیں اور اس لئے لٹو انتصابی رہتا ہے لیکن جوں ہی طہ > طہ انتہا زات حدود طہ = . اور طہ = طہ کے درمیان ہونے لگتے ہیں فرض کرو کہ ہم لٹو کو زاویہ رفتار طہ سے جو طہ سے بڑی ہے چلاتے ہیں اس لئے پہلے اس کا محور انتصابی ہے اور لٹو کی حرکت صرف اس کے محور کے گرد گردش کی حرکت ہے۔ اب طہ کی حقیقی اصلیں . ہیں

(۳۱۶) اور اس لیے ہتھکنڈوں کی کوئی سعت نہیں ہے اور لٹو کا محور ٹھیک انتہائی رہتا ہے۔
 اس کو انگریزی عام زبان میں کہتے ہیں کہ لٹو "Asleep" ہے اور اردو میں اسکو لٹو کی نیند کہا جاتا ہے۔
 اگر مفروضہ شرطیں بدرجہ اتم پوری ہوتیں تو یہ حرکت دائم جاری رہتی
 لیکن فطرت میں ایسی کامل شرطیں موجود نہیں ہو سکتیں۔ کیل اور اس سطح
 کے درمیان جس پر لٹو گھومتا ہے تماس کا علاقہ ٹھیک ایک نقطہ نہیں ہوتا
 بلکہ ایک چھوٹا دائرہ یا قطع ناقص ہوتا ہے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ نقطہ تماس
 پر تھوڑا سا بچکاؤ وقوع پذیر ہوتا ہے۔ کیل کو سخت فولاد کا بنانے اور لٹو کو
 ایک سخت سطح پر رکھانے سے یہ علاقہ چھوٹا بنایا جاسکتا ہے لیکن وہ پھر بھی
 محدود ابعاد کا ہوگا۔ اس کا نتیجہ یہ ہے کہ کیلے پر کے تعاملات سب کے
 سب محور سے نہیں ملتے۔ لٹو کی گردش میں فراحت پیدا کرنے والا ایک
 فر کی چھوٹا جفت ہوتا ہے اور طا بتدریج گھٹتا ہے۔

جب 'طا' اتنا گھٹ جاتا ہے کہ وہ طا. سے کم ہوتا ہے تو ہتھکنڈوں
 کی سعیتیں ط. = . اور طہ = ظہ ہوتی ہیں۔ لٹو اب نیند میں نہیں ہوتا بلکہ
 زاویہ ظہ میں سے لڑکھڑانے لگتا ہے۔ جیسے طا گھٹنا جاری رکھتا ہے
 ظہ مسلسل بڑھتا ہے جو مساوات (۱۴۷) سے ظاہر ہے اور بالآخر
 ظہ اتنی بڑی قیمت تک پہنچ جاتا ہے کہ لٹو زمین پر لڑکھڑانے لگتا ہے اور اسے
 گر پڑتا ہے۔

۲۵۷۔ ایک بہت ہی سادہ قسم کے لٹو کی صورت میں یہ نتیجے جو شکل اختیار
 کرتے ہیں ان کا امتحان کرنا دلچسپی کا موجب ہوگا۔ فرض کرو کہ کمیت گ اور

نصف قطر کی ایک ایکساں قرص

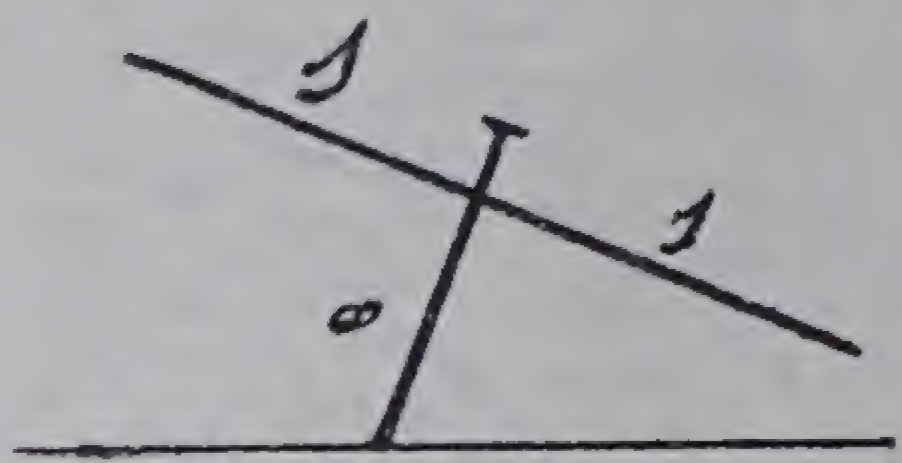
ہے اور اس کے مرکز میں سے ایک

پن گذار کر لٹو بنایا گیا ہے۔ فرض کرو کہ

پن کا وہ طول جو قرص میں سے اس کی

نچلی جانب نکلا ہوا ہے وہ ہے

اور فرض کرو کہ قرص کی کمیت کے



شکل (۱۵۲)

مقابلہ میں پن کی کمیت قابل نظر انداز ہے۔ وہی ہے جو دفعات ماسبق کے مسائل
تحلیلی میں فرض کیا گیا تھا۔ (۱) اور جب کی قیمتیں ہیں

$$۱ = \frac{۱}{۲} ک ۱ ، ب = \frac{۱}{۲} ک ۱$$

$$اس لیے ط ۱ = \frac{۲ ک ۱ ب}{۲} = \frac{۲ ج ۲}{۲}$$

جب لٹو فاصل رفتار ط ۱ پر لڑ کھڑانے کی ابتدا ہوتی ہے گھومنے
لگتا ہے تو کور پر کے کسی نقطہ کی رفتار ط ۱ ہے یعنی ۲ ج ۲۔ اس طرح لڑ کھڑانا
شروع ہوتا ہے جبکہ کور پر کے کسی نقطہ کی رفتار ۲ ج ۲ میں گھٹ جاتی ہے
یہ رفتار ایسی ہے جو صرف قرص کے ارتفاع پر منحصر ہے اور اس کے نصف قطر پر
منحصر نہیں ہے۔ چنانچہ ہم دیکھتے ہیں کہ قرص جتنا نیچے ہوگا اتنا سست وہ بغیر
لڑ کھڑائے گھومے گا۔ اگر ہم $۲ = ۱$ لیں تو معلوم ہوگا کہ لڑ کھڑانا شروع ہوتا
ہے جبکہ کور کی رفتار تقریباً ۲۴ فٹ فی ثانیہ ہے۔

کور زمین کو مس کرے گی جبکہ لڑ کھڑانے کی سمت مس خط = $\frac{۲}{۱}$

(۳۱۷)

حاصل ہو اور اس کے بعد لٹو زمین پر لڑ کھٹکے گا۔ اگر ہم حسب سابق $۱ = ۶$ اور
 $۲ = ۱$ لیں تو مس خط = $\frac{۱}{۳}$ اور اس لیے جم خط = $\frac{۳}{۱۰۶}$ اور $\frac{ط ۱ - ط ۲}{ط ۱}$

$= ۱۰۶$ تقریباً۔ اس طرح ط ۱ = $\frac{۱۹}{۲}$ ط ۲ تقریباً۔ پس ایسا لٹو نیت میں
رہے گا تا آنکہ اس کی کور کی رفتار ۲۴ فٹ فی ثانیہ تک گھٹ جائے۔ اس کے
بعد وہ لڑ کھڑائے گا اور جوں ہی اس کی کور کی رفتار تقریباً ۵۲ فٹ فی ثانیہ
فی ثانیہ تک گھٹ جائے گی وہ زمین پر لڑ کھٹکنے لگیگا۔

معمولی چھوٹے لٹو کے لیے جس کی شکل ناشپاتی جیسی ہوتی ہے ہم
 $\frac{۱}{۲} = ۱$ تقریبی طور پر لے سکتے ہیں اور نقطہ تماس میں سے گزرنے والے
محوروں کے گرد گھماؤ کے نصف قطروں کو $\frac{۳}{۲}$ اور $\frac{۲}{۲}$ لے سکتے ہیں۔ اس لیے

انچوں میں

$$1 = \frac{9}{16} \text{ ک } ، \text{ ب } = \frac{1}{4} \text{ ک}$$

$$\text{طا} = \frac{2}{21} \text{ ک ج ب} = \frac{20.48}{24} \text{ ج}$$

ج = ۳۸۶ فی ثانیہ فی ثانیہ لینے سے طا = ۱.۷۰ گردشیں فی ثانیہ۔ اگر لٹو کو ایک دوری سے گھمایا گیا ہو جس کا سرالٹو کے گرد نصف قطر ایک انچ کے دائروں میں لپیٹا گیا ہے تو دوری کو لٹو کے لحاظ سے تقریباً ۶۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے کھینچنا چاہئے تاکہ مطلوبہ زاویہ رفتار پیدا ہو۔

عام مثالیں

۱۔ ایک اڑپہیہ کے جمود کا معیار یہ ہے، اس کے محور کے گرد جس کا نصف قطر ب ہے ایک دوری لپٹی ہوئی ہے۔ وزن و کے مساوی تناؤ ایک ثانیہ تک دوری پر عائد کیا گیا ہے۔ ایک ثانیہ کے ختم پر اڑپہیہ کی زاویہ رفتار کیا ہوگی؟

۲۔ ایک بحری بیڑہ جس کا مجموعی ہٹاؤ ۲ ٹن ہے خط استوا پر مشرق سے مغرب کی جانب حرکت کرتا ہے اور فی گھنٹہ طول بلد کے ۲۰ دقیقے طے کرتا ہے۔ زمین کو کمیت ۶ x ۱۰^{۲۱} ٹن کا ایک متجانس کرہ سمجھ کر زمین کی زاویہ رفتار میں تبدیلی معلوم کرو جو بیڑے کی حرکت سے پیدا ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ دن کے طول میں تقریباً ۱۶ x ۱۰^{۱۴} ثنائے کا اضافہ ہوتا ہے۔

۳۔ زمین کی کمیت ۶ x ۱۰^{۲۱} ٹن ہے اور برف ٹیلے اور گچھلا ہوا برف وزنی ۱۰ ٹن قطب شمالی سے عرض بلد ۴۵° کی جانب حرکت کرتے ہیں۔ دن کے طول میں تبدیلی معلوم کرو۔

۴۔ کمیت ک کی ایک ٹرین شمالاً ۶۰ میل فی گھنٹہ سے دوڑتی ہے۔ ثابت کرو کہ مشرقی پٹری اور پہیہ کی کوروں کے درمیان زمین کی گردش کی وجہ سے

ایک دباؤ ہونا چاہئے، اس دباؤ کی مقدار معلوم کرو۔

۵۔ زمین پر شہابیوں کے گرنے سے جو تمام سمتوں سے زمین پر پہنچتے ہیں غبار کی ایک تیلی تہ جمتی ہے جس کی موٹائی ۵ فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ دن کے طول میں تبدیلی تقریباً $\frac{5}{17}$ غہ فی یوم ہوگی جہاں زمین کا نصف قطر فٹوں میں

۱ ہے اور زمین اور شہابی غبار کی کثافتیں علی الترتیب ۵ اور غہ ہیں۔

۶۔ دو کمیتیں گ اور ک جو چرخ اور محور سے لٹکائی گئی ہیں متوازن نہیں ہیں، چرخ اور محور کے نصف قطر علی الترتیب ۱ اور ب ہیں۔ ثابت کرو کہ گ کا اسراع

$$گ = ۱ - ک ب$$

ہے جہاں م، مشین کے جمود کا معیار اس کے محور کے گرد ہے۔
۷۔ ایک ہلکی، کامل ملائم، نا امتداد پذیر دوری ایک ایکساں اسطوانے کی مرکزی تراش کے گرد لپٹی ہوئی ہے۔ دوری کا ایک سیرا ایک ثابت نقطہ سے بندھا ہے اور اسطوانے کو گرنے چھوڑ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ اسراع $\frac{2}{3} ج$ کے ساتھ گرے گا۔

۸۔ طول ۱۲ کے دو مساوی ایکساں ڈنڈے ایک سیرے پر ڈھیلے جوڑے گئے ہیں اور ان کو نصف قطر $\frac{2}{3}$ کے ایک ثابت کرہ پر متشاکلاً

رکھ کر ایک افقی محل میں اس طرح اٹھایا گیا ہے کہ قبضہ کرہ کو مس کرتا ہے۔ تب ان کو اترنے چھوڑ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ جب وہ اولاً ساکن ہوتے ہیں تو وہ افقی سے زاویہ $\frac{1}{2}$ پر مائل ہوتے ہیں اور یہ کہ ہر نقطہ تماس پر کرہ پر دباؤ ایک ڈنڈے کے وزن کا ایک ربح ہے اور نیز یہ کہ قبضہ پر کوئی فساد نہیں ہے۔

۹۔ ایک ڈنڈے کا ایک سیرا ایک چکنے افقی مستوی پر ٹکا ہوا ہے اور دوسرا سیرا ایک چکنی انتصابی دیوار پر، ڈنڈا افق سے زاویہ $\frac{1}{2}$ پر مائل ہے۔

اگر اس کو پھسلنے چھوڑ دیا گیا تو ثابت کرو کہ وہ دیوار سے جدا ہو گا جبکہ افق کے

ساتھ اس کا میلان جب $\left(\frac{1}{3}\right)$ جب $\left(\frac{1}{3}\right)$ ہو جائے۔

۱۰۔ اگر سورج بتدریج اس طریقہ پر سکڑے کہ ترکیب اور شکل میں ہمیشہ اپنے
مشابہ رہے تو ثابت کرو کہ جب ہر نصف قطر اپنے طول کا $\frac{1}{2}$ واصل حصہ سکڑ چکے
جہاں ن بڑا ہے تو زاویہ رفتار اپنی پہلی قیمت سے $\left(1 + \frac{1}{2}\right)$ گنا بڑھ جائے گی
گردش کی توانائی یا حرکت میں تبدیلی معلوم کرو۔

۱۱۔ ایک لچکدار پٹے کا طبعی طول πr ، کمیت ک، اور مقیاس
لہ ہے۔ یہ پٹہ افقی مستوی میں نصف قطر r کے ایک کھردرے پہیہ پر ساکن ہے۔
پٹے کو پہیہ کے محیط کے مقابل پکڑ کر پہیہ کو زاویہ رفتار ω کے ساتھ گھمایا گیا۔
اگر پٹہ کو چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ وہ وسیع ہو گا اور جب اس کا نیم قطر

ر ہو گا تو اس کی زاویہ رفتار $\frac{\omega r}{2}$ ہوگی اور اس کی نیم قطری رفتار

$$\left[\frac{\omega^2 r^2}{2} - \frac{\pi^2 r^2}{2} (1 - \frac{1}{2}) \right]$$

ہوگی۔

۱۲۔ ایک ایکساں مثلثی قرص (ب ج کو اس طرح سہارا گیا ہے کہ
(۳۱۹) وہ اپنے مستوی میں (کے گرد) ہتزاز کر سکتا ہے، اس کا مستوی انصافی ہے۔
ثابت کرو کہ اس کے مماثل سادہ رقاص کا طول

$$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{3(b^2 + c^2) - a^2}{2(b^2 + c^2) - a^2}}$$

ہے۔

۱۳۔ کمیت ک کے شیشے کے ایک مکعب میں نصف قطر r کا ایک
کروی جوف بنایا گیا ہے اور اس جوف کے اندر کمیت ک کا ایک ذرہ رکھا
گیا ہے۔ پھر مکعب کو ایک چکنے افقی مستوی پر رفتار ω کے ساتھ پھینکا گیا ہے۔

اگر ذرہ کرہ کے گرد ٹھیک ایک چکر لگائے اور اثنائے حرکت میں کرہ کو مس کرتا رہے تو ثابت کرو کہ

$$و^2 = ۵ ج ۱ + ج ۱۲ ج ۱ ک$$

۱۴۔ ناقابل قدر کمیت کے ایک ڈنڈے کے سروں اور وسطی نقطہ پر تین مساوی ذرے لگائے گئے ہیں اور ایک سرے پر کے ذرہ پر ڈنڈے کے علی القوا تم ایک ضرب لگائی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ ذروں کی ابتدائی رفتاریں نسبت

$$۱ : ۲ : ۵$$

میں ہوں گی۔

۱۵۔ کمیت ک اور نصف قطر ۱ کا ایک کھردرا افقی اسطوانہ اپنے محور کے گرد گردش کرنے میں آزاد ہے۔ اس کے گرد ایک دوری لپٹی گئی ہے جس کے آزاد سرے پر کمیت ک اور طول ۱ کی ایک زنجیر لگی ہوئی ہے۔ زنجیر کو ایکجا اکٹھا کر کے چھوڑ دیا گیا ہے۔ اگر طہ وہ زاویہ ہو جس میں سے اسطوانہ زنجیر کے پوری طرح تن جانے سے وقت ت پیشتر گھوم چکا ہے تو ثابت کرو کہ

$$ک ۱ طہ = \frac{ک}{ل} (۱ ج ۱ ت ۱ - ۱ طہ ۲)$$

۱۶۔ ایک ایکساں چپٹی دائری تھالی کو ایک کھردرے افقی مستوی پر پھینکا گیا ہے، اور کسی عنصر پر جو رفتار و سے حرکت کر رہا ہو رگڑم و x (عنصر کی کمیت) ہے جس کی سمت و کی سمت کے خلاف ہے۔ تھالی کے مرکز کا راستہ معلوم کرو۔

بارہواں باب

(۳۲۰)

تعمیم شدہ محدود

۲۵۸۔ اب تک ہم نے مادی اجسام کے علم الحیئل (حرکیات اور سکونیات) پر اس مفروضہ کے ساتھ بحث کی ہے کہ یہ اجسام لا تعداد چھوٹے ذروں پر مشتمل ہیں جو استوار جسم کی صورت میں اپنے اپنے محل پر مضبوطی کے ساتھ جکڑے ہوئے ہیں اور ان کے ذریعہ جسم کے ایک حصہ سے دوسرے حصہ تک قوت کو منتقل کیا جاسکتا ہے۔

۲۵۹۔ استوار اجسام کی صورت میں بھی مادہ کی ساخت کے متعلق یہ قیاس بالکل مطابق نتائج پیدا نہ کر سکا۔ مثلاً دو غیر کامل چکڑاں اجسام کے درمیان ٹکڑے کے بعد یا دو غیر کامل چکڑے اجسام کے درمیان پھسلنے کے بعد یہ معلوم ہوا ہے کہ توانائی کی کچھ مقدار نظروں سے غائب ہو جاتی ہے چنانچہ ہمیں یہ فرض کرنا پڑا تھا کہ یہ توانائی جسم کے انتہائی ذروں کی ایک دوسرے کے لحاظ سے حرکتوں کے پیدا کرنے میں کام آتی ہے۔ دوسرے الفاظ میں ٹکڑیاں پھسلنے واقع ہونے کے بعد استوار اجسام کے متعلق یہ فرض نہیں کیا جاسکتا کہ وہ ان شرطوں کو پورا کرتے ہیں جن کا اودھا کیا گیا ہے۔ ان جسموں کی صورت میں جو صریحاً استوار نہیں ہیں حال اس سے زیادہ بہتر ہے۔ یہاں وہ قیاسات جو ہم نے استوار اجسام کے مطالعہ میں قائم کئے تھے کوئی مدد نہیں پہنچاتے اور ان کی بجائے دیگر قیاسات

بغیر آگے بڑھنا بہت دشوار ہے۔

۲۶۰۔ اس منزل پر آگے بڑھنے کے دو طریقے ہیں۔ ہم ان نئے قیاسات کو جو احسن معلوم ہوں اختیار کر سکتے ہیں اور اس طریقہ پر زیر بحث مادہ کی ساخت کی تصویر کھینچ سکتے ہیں۔ لیکن یہ یقینی نہیں کہ اس طریقہ سے جو نتائج حاصل ہوں گے وہ صحیح ہوں گے کیونکہ کبھی بھی ہمیں اس کا یقین نہیں ہو سکتا کہ مادہ کی انتہائی ساخت کی نوعیت کے متعلق ہمارے قیاسات صحیح ہیں۔ بریں ہم مادہ کی ساخت کے متعلق ان شرطی قیاسات کے ادخال سے یہ دیکھنا کہ کیا نتائج حاصل ہوتے ہیں خالی از قدر قیمت نہیں ہے۔ اگر یہ نتیجے ان مظاہر کے مطابق ہیں جو فطرت میں زیر مشاہدہ آتے ہیں تو ہمارے شرطی قیاسات کا صداقت سے قریب ہونا درست ہو سکتا ہے۔ لیکن اس کے برخلاف اگر حاصل شدہ نتیجے ان مظاہر کے مطابق نہ ہوں تو ان قیاسات میں جن سے یہ نتیجے حاصل ہوتے ہیں یا تو ترمیم کرنی ہوگی یا انہیں ترک کرنا ہوگا۔

مادہ کی ساخت سے متعلق مختلف قیاسات سے ریاضی طبیعیات کی مختلف شاخیں برآمد ہوں گی۔ تمثیلاً ریاضی طبیعیات کی ایسی شاخوں میں سے "پلکیدار ٹھوس اجسام کا نظریہ" اور گلیسوں کا حرکی نظریہ "پیش کئے جاسکتے ہیں۔ قبل الذکر کی بنیاد ان شرطی قیاسات پر ہے جو ان ذروں کے سلوک کے متعلق قائم کئے گئے ہیں جن سے ٹھوس اجسام کی ترکیب ہوتی ہے۔ اور بعد الذکر نظریہ کی بنیاد ان شرطی قیاسات پر ہے جو گلیس کے ذروں کے سلوک کے متعلق قائم کئے گئے ہیں۔ مادہ کی ساخت سے متعلق مختلف قیاسات سے جو نتائج برآمد ہوتے ہیں ان کا تذکرہ اور تفہیم صریحاً اس کتاب کے حدود سے باہر ہے۔

۲۶۱۔ لیکن آگے بڑھنے کا ایک متبادل طریقہ ہے۔ ہم نے نیوٹن کے حرکت کے قوانین کو وہ مواد سمجھا ہے جو تجربی سائنس نے نظری سائنس کے لیے مہیا کیا ہے تاکہ نظری سائنس میں اس سے کام لیا جاسکے۔ ان

قوانین کی صداقت جبکہ انہیں مادی کائنات کے انتہائی ذروں پر استعمال کیا جائے کسی طرح یقینی نہیں ہے کیونکہ ہم ان انتہائی ذروں کو حاصل نہیں کر سکتے کہ ان پر تجربہ کیا جائے۔ تاہم فرض کرو کہ ہم اس کا امتحان کرتے ہیں کہ آیا علم الحیل میں صرف اس دعوے کے ساتھ (اور یہ بلاشبہ غیر یقینی ہے) کہ نیوٹن کے قوانین انتہائی ذروں پر اطلاق پذیر ہیں کوئی ترقی ہو سکتی ہے۔ اگر ہم اس سمت میں کوئی ترقی کر سکیں تو حاصل شدہ نتیجے بلاشبہ علم الحیل کی تمام دیگر توسیعات پر اطلاق پذیر ہوں گے خواہ ہم انتہائی ذروں کی نوعیت اور ترتیب کے متعلق کوئی مزید دعوے داخل کریں یا نہ کریں۔

۲۶۲ — وہ مقام جہاں سے ہم مادہ کو دیکھ رہے ہیں شاید ایک تمثیل سے واضح کیا جاسکتا ہے، اس تمثیل کو سب سے پہلے کلرک میا کسویل نے بیان کیا تھا۔ فرض کرو کہ ایک پیچیدہ مشین ایک بند کمرہ میں رکھی ہوئی ہے اور اس مشین اور بیرونی دنیا کے درمیان صرف متعدد رسیوں کے ذریعہ تعلق قائم ہے جو فرش کے سوراخوں میں سے نیچے کے کمرہ میں لٹک رہی ہیں۔ اگر کوئی شخص نیچے کے کمرہ میں داخل ہو تو اسے مشین کے معائنہ کرنے کا کوئی موقع نہیں ملے گا لیکن وہ مختلف رسیوں کو کھینچ کر مشین کو کچھ حد تک استعمال کر سکتا ہے۔ اگر ایک رسی کھینچنے پر اس کو معلوم ہو کہ دوسری رسیاں حرکت میں آتی ہیں تو وہ سمجھ سکتا ہے کہ یہ رسیاں اوپر کسی نہ کسی میکا نیت کے ذریعہ مربوط ہوئی چاہئیں لیکن وہ اس میکا نیت کی ٹھیک نوعیت دریافت کرنے سے قاصر رہے گا۔

اس مخفی میکا نیت کے متعلق یہ فرض کیا جاسکتا ہے کہ وہ کائنات کی میکا نیت کے ان حصوں کو تعبیر کرتی ہے جو ہماری نظر سے پوشیدہ ہیں اور رسیوں سے وہ حصے تعبیر ہوتے ہیں جن کو ہم چلا سکتے ہیں۔ فطرت میں بعض اعمال ہیں جن کو ہم انجام دے سکتے ہیں، یہ گویا ہماری تمثیل میں رسیوں کے کھینچنے کا جواب ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ ان اعمال سے بعض نتائج پیدا ہوتے ہیں جو دوسری رسیوں کی حرکت کا جواب ہیں۔ لیکن وہ میکا نیت

جس کی وجہ سے وہ سبب یہ اثر پیدا کرتا ہے بالکل نامعلوم رہتا ہے مثلاً اگر ہم ایک برقی دور کی چابی کو دبائیں تو یہ معلوم کیا جاسکتا ہے کہ دور رکھے ہوئے ایک برقی روپیہ کی سوئی حرکت کرتی ہے لیکن وہ حلی اعمال جو دور کے تاروں میں سے اور برقی روپیہ کو گھیرے ہوئے اثیر میں سے اس عمل کو منتقل کرتے ہیں نامعلوم رہتے ہیں۔

۲۶۳۔ اب فرض کرو کہ وہ شخص جو نیچے کے کمرہ میں داخل ہوا ہے رسیوں کو اپنے حسب مرضی استعمال کرنے میں آزاد ہے اور یہ کہ وہ رسیوں کے درمیان تعلق کو دریافت کرنا چاہتا ہے۔ وہ اس قیاس پر ابتداء کر سکتا ہے کہ اوپر کے کمرہ کی مشین کی میکائینیت میں (فرض کرو) بیرم چرخیاں اور دندائے دار پہیے شامل ہیں اور وہ بطور خود اس طریقہ کا اندازہ لگا سکتا ہے جس میں رسیوں کو حرکت کرنا چاہئے اگر اس کے قیاسات صحیح ہیں۔ یہ عمل اس کے مثال ہوگا جس کو ہم دفعہ ۲۶۲ میں بیان کر چکے ہیں لیکن ہم اس کی تقلید یہاں نہیں کریں گے۔

اس کے برخلاف اوپر کی میکائینیت کی نوعیت کے متعلق کسی قیاس آرائی کے بغیر نیچے کے شخص کو یہ معلوم ہوگا کہ اگر رسیاں کسی نہ کسی میکائینیت کے ذریعہ مربوط ہیں تو ان کی حرکت چند خاص قوانین کے تابع ہے مثلاً یہ کہتا کہ ہر ذرہ نیچے کے حرکت کے قانون کی پابندی کرتا ہے۔ اس کی تفہیم کے لئے فرض کرو کہ ہم سادہ ترین صورت لیتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ صرف دو رسیاں ہیں اور یہ کہ اگر ایک رسی ۱ کو ایک انچ کھینچا جاتا ہے تو دوسری رسی ۲ ہمیشہ دو انچ چڑھتی ہے۔ میکائینیت ایک بیرم چرخوں کا ایک نظام یا دندائے دار پہیہ ہو سکتی ہے۔ لیکن خواہ وہ ان میں سے کوئی ہو یا ان سے بالکل مختلف کوئی اور انتظام ہو یہ معلوم ہوگا کہ رسی ۱ کی نیچے وار حرکت کو رسی ۲ پر ایک ایسی قوت لگا کر مقید کیا جاسکتا ہے جو ۱ پر عمل کرنے والی قوت کے نصف کے مساوی ہے۔ یہ حقیقت موہوم کام کے اصول سے منبج ہوتی ہے اور اس کو اس قیاس سے

کوئی تعلق نہیں ہے جو مخفی میکا نیت کی نوعیت کے متعلق قائم کیا گیا ہو۔
 اب ہمارے سامنے حسب ذیل سوال ہے: کیا ہم مخفی میکا نیت کے
 کسی علم کے بغیر یہ دریافت کر سکتے ہیں کہ رسیوں کی کیا حرکت پیدا ہوگی
 اگر ان کو کسی معلومہ طریقہ پر حرکت میں لایا جائے۔ اس کا جواب یہ ہے
 کہ ہاں ہم ایسا کر سکتے ہیں بشرطیکہ ہمیں توانائی کی وہ مقدار معلوم ہو جو کسی
 قسم کی حرکت میں شامل رہتی ہے یعنی بشرطیکہ ہمیں ہر حرکت کی توانائی بالحرکت
 اور نیز ہر شکل (محل) کی توانائی بالقوہ معلوم ہو۔
 اسی طرح اگر ہم تمثیلات سے حقیقتوں پر آئیں تو کائنات کی انتہائی
 میکا نیت کے متعلق کسی علم کے بغیر ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ کسی ابتدائی
 شرطوں سے کیا حرکت پیدا ہوگی بشرطیکہ کائنات کے اس حصہ کی تمام
 تشکیلات کی توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ معلوم ہو جس سے ہم بحث
 کر رہے ہیں۔

ہیملٹن کا اصول

۲۶۴ — فرض کرو کہ ایک مادی نظام کے کسی واحد ذرہ کے محدود کسی آن
 لا، 'ما'، 'ی' ہیں اور اس کی کمیت ک ہے اور فرض کرو کہ اس پر جو قوتیں
 عمل کرتی ہیں اس کے حاصل کے اجزائے ترکیبی لا، 'ما'، 'ی' ہیں۔
 فرض کرو کہ اس ذرہ کی رفتار کے اجزائے ترکیبی ع، 'و'، 'ط' ہیں، اسلئے

$$ع = \frac{فر لا}{وزت} ، وغیرہ$$

اب اگر اس ذرہ کی حرکت قوانین نیوٹن کے تابع ہے تو حاصل ہونا چاہئے

$$ک = \frac{فر ع}{وزت} = لا ، (۱۴۸)$$

$$(۱۴۹) \quad ک = \frac{فروت}{فرت} = صا$$

$$(۱۵۰) \quad ک = \frac{فرط}{فرت} = م$$

(۳۲۴) فرض کرو کہ ہم اس حرکت کا مقابلہ قدرے مختلف حرکت سے جو قوانین نیوٹن کے تابع نہیں ہے کرتے ہیں۔ اس دوسری حرکت میں فرض کرو کہ ک کے محدود اس آن جس پر یہ محدود حقیقی حرکت میں لا، ما، ی ہیں لا، ما، کی سے تعبیر کئے گئے ہیں اور فرض کرو کہ اس لمحہ پر رفتار کے اجزائے ترکیبی ع، و، ط، ہیں اس لیے

$$ع = \frac{فرلا}{فرت} \text{ وغیرہ}$$

فرض کرو کہ یہ مرمہ حرکت حقیقی حرکت سے استقدر خفیف فرق رکھتی ہے کہ لا، لا، ع، ع، جیسی کوئی مقدار جو صرف اس فرق کے ایک حصہ کو تعبیر کرتی ہے ایک چھوٹی مقدار سمجھی جاسکتی ہے۔ فرض کرو کہ ہم لا، لا، کو مف لا، سے تعبیر کرتے ہیں اور ایسی ہی ترقیم دوسرے فرقوں کے لئے استعمال کرتے ہیں۔

مساداتوں (۱۳۸)، (۱۴۹)، (۱۵۰) کو جو ہر لمحہ پر درست ہیں مف لا، مف ما، مف ی، سے ضرب دو اور جمع کرو تو

$$ک = \frac{فرع}{فرت} مف لا، + ک = \frac{فروت}{فرت} مف ما، + ک = \frac{فرط}{فرت} مف ی$$

$$= لا، مف لا، + ما، مف ما، + ع، مف ی (۱۵۱)$$

$$اب \quad \frac{فرع}{فرت} مف لا، = \frac{فرع}{فرت} (ع، مف لا،) - ع، \frac{فرع}{فرت} (مف لا،)$$

$$= \frac{فرع}{فرت} (ع، مف لا،) - ع، \frac{فرع}{فرت} (لا، - لا،)$$

$$= \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} (ع, \text{مف لا}) - (ع, \text{مف لا})$$

$$= \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} (ع, \text{مف لا}) - (ع, \text{مف لا})$$

اس لئے

$$ک \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} (ع, \text{مف لا}) + ک \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} (ع, \text{مف لا}) + ک \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} (ع, \text{مف لا})$$

$$= ک [\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} (ع, \text{مف لا}) + (ع, \text{مف لا}) + (ع, \text{مف لا})]$$

$$- (ع, \text{مف لا}) + (ع, \text{مف لا}) + (ع, \text{مف لا})$$

$$= لا, \text{مف لا} + ما, \text{مف لا} + ع, \text{مف لا} (۱۵۲)$$

بموجب مساوات (۱۵۱)

(۳۲۵)

اس قسم کی مساوات نظام کے ہر ذرہ کے لیے اور حرکت کے ہر لمحہ پر درست ہے۔ نیز وہ درست ہے خواہ اسی ہوئی حرکت کچھ ہی ہو۔ اس مساوات کو تمام ذروں کے لیے جمع کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$ح ک [\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} (ع, \text{مف لا}) + (ع, \text{مف لا}) + (ع, \text{مف لا})]$$

$$- (ع, \text{مف لا}) + (ع, \text{مف لا}) + (ع, \text{مف لا})$$

$$= ح (لا, \text{مف لا} + ما, \text{مف لا} + ع, \text{مف لا})$$

(۱۵۳)

اب فرض کرو کہ حرکت کی توانائی یا حرکت ت سے تعبیر ہوتی ہے تو

$$ت = \frac{۱}{۲} ح ک (ع^۲ + و^۲ + ط^۲)$$

$$تب \text{ مف ت} = \frac{۱}{۲} ح ک (ع^۲ - و^۲ + و^۲ - ط^۲ + ط^۲ - ط^۲)$$

لیکن $\epsilon_1 - \epsilon_2 = (\epsilon_1 + \text{مف } \epsilon_1) - \epsilon_2 = \epsilon_1 + \text{مف } \epsilon_1 - \epsilon_2$

اگر ہم دوسرے رتبہ (مف ϵ_1) کی چھوٹی مقدار کو نظر انداز کر دیں۔ اس لیے

مف ت = ح ک (مف $\epsilon_1 + \text{مف } \epsilon_1 + \text{مف } \epsilon_1 + \text{مف } \epsilon_1$)

۲۶۵۔ فی الحال مان لو کہ قوتوں کا نظام بقائی ہے اور فرض کرو کہ زیر بحث لمحہ پر نظام کی توانائی بالقوہ ک ہے اور خفیف طور پر ہٹی ہوئی تشکیل میں خیالی نظام کی توانائی بالقوہ ک ہے۔ تب بموجب دفعہ ۱۱۸

مف ک = ک - ک

= (وہ کام جو نظام کو حقیقی تشکیل سے ہٹی ہوئی تشکیل تک حرکت دینے میں انجام پایا)

= - ح (ک - مف لا + مف با + مف ی)

(۱۵۴)

مساوات (۱۵۳) میں ان جملوں کی بجائے جو مف ت اور مف ک کے مساوی معلوم کئے گئے ہیں اندراج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات حسب ذیل سادہ شکل میں تحول ہوتی ہے:

ح ک فرج (مف لا + مف با + مف ی) - مف ت = مف ک

یا فرج ح ک (مف لا + مف با + مف ی) = مف (ت - ک)

یہ مساوات حرکت کے ہر لمحہ پر درست ہے۔ فرض کرو کہ ہم اس کا تکمل حرکت کے کسی دو لمحوں ت = ت اور ت = ت کے درمیان کرتے ہیں

[ح ک (مف لا + مف با + مف ی)]

= حرکت (ت - ک) فرت (۱۵۵)

ہی ہوئی حرکت اب تک کسی قید کے تحت نہیں رہی الا انکہ اس کے اور حقیقی حرکت کے درمیان فرق ہمیشہ خفیف ہونا چاہئے۔ اب ہم ایک اور قید عائد کرتے ہیں کہ اوقات t اور t_2 پر ہی ہوئی حرکت میں تشکیلات ان تشکیلات پر مطبق ہوتی ہیں جو حقیقی حرکت میں حاصل ہوتی ہیں۔ پس ہی ہوئی حرکت اب وہ ہے جس میں خیالی نظام وقت $t = t_2$ پر اسی تشکیلات میں حرکت کی ابتدا کرتا ہے جس میں حقیقی نظام وقت $t = t_2$ پر کرتا ہے اس کے بعد خیالی نظام وقت t_2 سے t_1 تک اس رشتہ سے جس پر حقیقی نظام حرکت کرتا ہے ذرا ہٹا ہوا حرکت کرتا ہے (کیونکہ حقیقی نظام قوانین نیوٹن کے تحت حرکت کرتا ہے اور خیالی نظام کی حرکت اس کے تحت نہیں ہے) اور بالآخر وقت t_2 پر اسی محل میں آجاتا ہے جس میں حقیقی نظام آتا ہے۔

خیالی نظام پر اس شرط کے عائد کرنے سے اوقات t_1 اور t_2 پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$مف لا = مف ما = مف ی = ۰$$

اور اسی وضع کے رشتے دوسرے ذروں کے لئے۔ پس

$$[ح ک] (ع مف لا + و مف ما + ط مف ی) = ۰$$

اور مساوات (۱۵۵) ہو جاتی ہے

$$= حرکت (ت - ک) فرت = ۰$$

یہ ایک ایسی مساوات ہے جو صرف نظام کی توانائی یا حرکت اور توانائی بالقوہ کی مقداروں پر منحصر ہے اور نظام کی میکانیت پر منحصر نہیں ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ اس واحد مساوات سے نظام کے تمام معلومہ

حصوں کی حرکت معلوم کی جاسکتی ہے جوں ہی ت اور ک معلوم ہو جائیں اور اس کے لئے غیر معلومہ حصوں کی یگانہیت کے علم کی ضرورت نہیں ہے۔

۲۶۶۔ اس کو ثابت کرنے سے پیشتر ہم مساوات (۱۵۶) کو سمجھنے کی کوشش کریں گے۔ فرض کرو کہ ہم ت۔ ک کو ل سے تعبیر کرتے ہیں۔ اب

ک^ت مف (ت۔ ک) فرت = ک^ت سف ل فرت

= ک^ت (ل۔ ل) فرت

= ک^ت ل فرت۔ ک^ت ل فرت

= مف (ک^ت ل فرت)

اگر ہم ک^ت ل فرت

کو س سے تعبیر کریں تو یہ مساوات مف س = س۔ ہو جاتی ہے یا س = س

اس طرح دوسری اور اعلیٰ تر رتبوں کی چھوٹی مقداروں کو نظر انداز کیا جائے تو حقیقی حرکت کے لئے تفاعل س کی قیمت وہی ہے جو کسی خفیف طور پر مختلف حرکت کے لئے متناظر تفاعل س کی ہے جبکہ یہ مختلف حرکت وہی لمحوں پر وہی تشکیلات سے حرکت کی ابتدا اور اختتام کرے۔ دوسرے الفاظ میں تفاعل س اعظم ہوتا ہے یا اقل جبکہ تشکیلات کا سلسلہ وہی ہو جو فطرت میں فی الواقع وقوع پذیر ہوتا ہے۔

اقل ترین عمل کا اصول

۲۶۷ — حقیقی حرکت کی اثناء میں کل توانائی حسب مسئلہ دفعہ (۱۷۳) مستقل رہے گی، فرض کرو کہ کل توانائی E سے تعبیر ہوتی ہے تو ہر لمحہ پر ہمیں حاصل ہوگا

$$T + K = E, \quad T - K = L$$

تشکیلات کے خفیف طور پر متغیر سلسلہ میں یہ کہنا صحیح نہیں ہے کہ اثناء حرکت میں کل توانائی مستقل رہتی ہے لیکن تشکیلات کے خفیف طور پر متغیر سلسلوں کی لامتناہی تعداد میں سے پھر بھی لامتناہی تعداد بچ رہے گی جن کے لئے مذکورہ بالا شرطیں مع اس شرط کے کہ ہر لمحہ پر کل توانائی E ہونی چاہئے پوری ہونگی۔ ایسے کسی سلسلے کے لئے حاصل ہوگا،

$$T + K = E, \quad T - K = L$$

$$L = 2T - E, \quad L = 2K - E$$

پس
اس لئے

$$S = \dot{K} - L \text{ فرت}$$

$$= \dot{K} - (2T - E) \text{ فرت}$$

$$= \dot{K} - 2T \text{ فرت} - (T - E) \text{ فرت}$$

پس اگر S اعظم یا اقل ہو تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\dot{K} - 2T \text{ فرت}$$

اعظم ہے یا اقل۔ اس تکملہ کو حرکت کا عمل کہتے ہیں۔ اب ہم دیکھتے ہیں کہ تشکیلات کے تمام ممکن سلسلوں میں جو نظام کو ایک تشکیل سے دوسری تشکیل تک معلومہ وقت میں اس طریقہ پر لاتے ہیں کہ کل توانائی ہمیشہ ایک مخصوص مستقل کے مساوی ہوتی ہے وہ سلسلہ جو ایک فطری نظام سے مرسم ہو سکتا ہے وہ جس پر عمل اعظم ہے یا اقل۔ اب چونکہ عمل بالعموم اقل ہوتا ہے اس لیے اس اصول کو اقل ترین عمل کا اصول کہتے ہیں۔

اس اصول کو اولامو فرٹینر (Maupertius) نے بیان کیا تھا لیکن اس نے اس کو استدلال ریاضی سے ماخوذ نہیں کیا تھا بلکہ اس کو اس امر کا یقین تھا کہ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ کائنات کی تبدیلیاں اس طرح وقوع پذیر ہونی چاہئیں کہ عمل اقل ہو۔ (Essai de Cosmologie, 1751)۔

غیر بقائی قوتیں

۲۶۸۔ اگر قوتیں بقائی نہ ہوں تو ہم مساوات (۱۵۴) میں

$\Sigma (L \text{ مف} + M \text{ مف} + E \text{ مف})$

کی بجائے۔ مف گ نہیں رکھ سکتے اور اس لیے مساوات (۱۵۶) کی بجائے حسب ذیل مساوات حاصل ہوگی:

گت [مف ت + $\Sigma (L \text{ مف} + M \text{ مف})$]

+ $\Sigma (E \text{ مف})$ [فرت = ۰ (۱۵۷)]

لگرنج کی مساواتیں

(۳۲۹)

۲۶۹۔ اگر نظام کے ہر ذرہ کے محدود لا، ما، می وغیرہ معلوم ہوں تو

ہم نہ صرف نظام کی تشکیل معلوم کر سکتے ہیں بلکہ وہ میکانیت بھی جس کے ذریعہ نظام کے مختلف اجزاء مربوط ہیں۔ تاہم یہ ہو سکتا ہے کہ مقداروں کی کمتر تعداد معلوم ہونے پر بھی نظام کی تشکیل متعین ہو سکے حالانکہ مقداروں کی اس تعداد سے میکانیت کا کوئی علم حاصل نہ ہوتا ہو۔

مثلاً ہماری پچھلی تمثیل میں ہم نے تصور کیا تھا کہ ایک نامعلوم مشین سے دو رسیاں لگتی ہیں اور رسیاں ایسے طریقہ پر مربوط ہیں کہ ایک رسی میں ایک انچ کی حرکت دوسری رسی میں ہمیشہ دو انچ کی حرکت پیدا کرتی ہے۔ اس صورت میں تشکیل پوری طرح معلوم ہو جاتی ہے جبکہ وہ واحد محدود معلوم ہو جائے جو پہلی رسی کے سرے کے محل کی پیمائش کرتا ہے۔ لیکن اس محدود کے معلوم ہونے سے رسیوں کو ملانے والی مکانیت کا علم حاصل ہوتا ضروری نہیں ہے۔

نیز ہم دفعہ ۶۵ میں دیکھ چکے ہیں کہ کسی استوار جسم کا محل کافی مقداروں (چھ) کی قیمتوں سے متعین ہو جاتا ہے، یہ مقداریں جسم کے تین ناہم خط ذروں کے محل فضا میں معلوم کرنے کے لیے مطلوب ہوتے ہیں۔ لیکن ان مقداروں کے علم سے ان ذروں کی ترتیب کے متعلق کوئی علم حاصل نہیں ہوتا جن سے جسم بنا ہے۔ فرض کرو کہ مقداروں طہ، طہ، طہ، ... کا ایک جٹ ایسا ہے کہ ان کی قیمت معلوم ہو تو اجسام کے ایک نظام کی تشکیل پوری طرح متعین ہو جاتی ہے۔ تب ان مقداروں طہ، طہ، طہ، ... کو نظام کے تقسیم شدہ محدود کہا جاتا ہے۔

۲۷۰۔ فرض کرو کہ نظام کے کسی ذرہ کے محدود لا، ما، می ہیں۔ تب طہ، طہ، طہ، ... کی قیمتوں سے لا پوری طرح معلوم ہوتا ہے اور اس لئے وہ ان مقداروں کا ایک تفاعل ہے، فرض کرو

لا = ف (طہ، طہ، طہ، ...) (۱۵۸)

اگر نظام متحرک ہے تو مساوات (۱۵۸) کی تمام مقداریں وقت کے تفاعل ہیں۔ پس وقت کے لحاظ سے تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}} + \dots$$

$$\dots + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}} + \dots$$

اختصار کی خاطر فرض کرو کہ ہم $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ ، $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ ، \dots کو لا، طہ، ... سے تعبیر کرتے ہیں۔ اب محصلہ بالا مساوات کو لکھا جاسکتا ہے

$$\text{لا} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}} + \dots + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}} + \dots \quad (۱۵۹)$$

اس لئے لا ایک خطی تفاعل ہے طہ، طہ، طہ، ...، طہ کا جن کے سر، طہ، طہ، ...، طہ کے تفاعل ہیں۔
توانائی بالحرکت

$$\text{ت} = \frac{۱}{۲} \text{ ک } (\text{لا} + \text{ما} + \text{نی})$$

طہ، طہ، طہ، ...، طہ کا ایک دو درجی تفاعل ہے جس کے سر، طہ، طہ، ...، طہ کے تفاعل ہیں۔
توانائی بالقوہ ک صرف نظام کی تشکیل پر منحصر ہوتی ہے اور اسلئے ک ایک تفاعل ہے صرف طہ، طہ، طہ، ...، طہ کا۔
اس طرح تفاعل ل یا ت۔ ک،
طہ، طہ، طہ، ...، طہ، طہ، طہ، ...، طہ کا ایک تفاعل ہے، فرض کرو

$$\text{ل} = \text{فہ} (\text{طہ، طہ، ...، طہ، طہ، ...، طہ، طہ}) \quad (۱۶۰)$$

ہٹی ہوئی حرکت میں متناظر تفاعل ل

ط_۱ + مف ط_۱، ط_۲ + مف ط_۲، ... وغیرہ

کا وہی تفاعل ہے اور اس لیے

ل = ف (ط_۱ + مف ط_۱، ط_۲ + مف ط_۲، ... ط_ن + مف ط_ن، ط_۱ + مف ط_۱، ...)

یڈر کے مسئلہ سے ہم ل کو شکل

ل = ف (ط_۱، ط_۲، ...، ط_ن، ط_۱، ...، ط_ن)

+ مف ط_۱ جف ف_۱ + مف ط_۲ جف ف_۲ + ... + مف ط_ن جف ف_ن

+ مف ط_۱ جف ف_۱ + ...

میں پھیلا سکتے ہیں اور اس لیے مساوات (۱۶۰) سے حاصل ہوتا ہے

ل = ل + ح_۱ مف ط_۱ جف ل + ح_۲ مف ط_۲ جف ل + ... + ح_ن مف ط_ن جف ل (۱۶۱)

مساوات (۱۵۶)

(۳۳۱)

گ_۱ مف (ت-ک) فرت = .

گ_۱ (ل-ل) فرت = .

کو شکل

میں لکھا جاسکتا ہے اور اب ہم دیکھتے ہیں کہ اس کی بجائے

گ_۱ (ح_۱ مف ط_۱ جف ل + ح_۲ مف ط_۲ جف ل + ... + ح_ن مف ط_ن جف ل) فرت = .

(۱۶۲)

کو رکھا جاسکتا ہے -
لیکن

مف طم = طم - طم = فرت (طم + مف طم) - فرت طم = فرت (مف طم)
 اس لئے کہ $\frac{\text{جفل}}{\text{جف طم}} = \text{مف طم فرت} = \frac{\text{جفل}}{\text{جف طم}} \cdot \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} = \text{مف طم فرت}$
 اور تکمیل بالخص سے یہ ہو جاتا ہے

[جفل مف طم] - $\frac{\text{جفل}}{\text{جف طم}} \cdot \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} = \text{مف طم فرت}$ (۱۶۳)
 چونکہ ہٹی ہوئی تشکیل بموجب فرض حقیقی تشکیل پر منطبق ہوتی ہے اس لیے
 اوقات ت، اور ت، پر مف طم = ۰۔۔۔ اس طرح پھیلاؤ (۱۶۳) میں
 پہلی رقم معدوم ہوتی ہے اور حاصل ہوتا ہے

$\frac{\text{جفل}}{\text{جف طم}} = \text{مف طم فرت} = \frac{\text{جفل}}{\text{جف طم}} \cdot \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} = \text{مف طم فرت}$
 اب مساوات (۱۶۲) شکل

$\frac{\text{جفل}}{\text{جف طم}} - \frac{\text{جفل}}{\text{جف طم}} \cdot \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} = ۰$ (۱۶۴)
 اختیار کرتی ہے۔

حدود ت، اور ت، بالکلہ ہمارے اختیار میں ہیں مساوات درست
 رہے گی خواہ ت، اور ت، کو ہم کوئی قیمتیں دیں۔ دوسرے الفاظ میں
 چھوٹے تفرقیوں کی ایک تعداد کا مجموعہ معدوم ہوتا ہے خواہ مجموعہ میں
 ایسے کتنے ہی تفرقی شامل ہوں۔ اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ مجموعہ
 کی ہر رقم معدوم ہونی چاہئے، اس لیے ہر لمحہ پر ہمیں حاصل ہونا چاہئے

(۳۳۲)

$\frac{\text{جفل}}{\text{جف طم}} - \frac{\text{جفل}}{\text{جف طم}} \cdot \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} = ۰$ (۱۶۵)

۲۷۱۔ اس موقع پر ہمیں دو متبادلات پر غور کرنا ہوگا۔ یہ ہو سکتا ہے کہ

مف طہ، مف طہ، ... مف طہ کی خواہ ہم کوئی قیمتیں مقرر کریں نئی
تشکیل جس کا تشخص محدودوں

طہ + مف طہ + مف طہ + ... طہ + مف طہ
کے ذریعہ ہوتا ہے ایک ممکن تشکیل ہو یعنی یہ تشکیل ایسی ہوگی کہ نظام
اس کو اختیار کر سکتا ہے اور اس کی میکانیت سے جو قیود عائد ہوتے ہیں
ان میں خلل نہیں پڑتا۔ اس صورت میں ہم کہتے ہیں کہ نظام آزادی کے
ن درجے رکھتا ہے۔

اگر نظام آزادی کے ن درجے رکھے تو مساوات (۱۶۵) مف طہ
مف طہ، ... مف طہ کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے۔
مثلاً وہ درست ہے اگر ہم لیں

مف طہ = صہ، مف طہ = مف طہ = ... = مف طہ =
جہاں صہ کوئی چھوٹی مقدار ہے۔ اس صورت میں ہمیں حاصل ہونا چاہئے

$$صہ = \left[\frac{\text{جفل}}{\text{جفل طہ}} - \frac{\text{فر}}{\text{فر ت}} \right] = 0$$

$$\text{اور اس لیے} \quad \frac{\text{فر}}{\text{جفل طہ}} - \left(\frac{\text{جفل}}{\text{جفل طہ}} \right) = 0$$

محدودوں طہ، طہ، ... طہ میں سے ہر ایک کے لیے اس کے
مشابہ مساوات درست رہے گی۔ ان مساواتوں کو لکرائیج کی مساواتیں

کہتے ہیں۔ ن نامعلوم مقداروں طہ، طہ، ... طہ اور وقت کے
لحاظ سے ان کے تفرقی سروں کے درمیان ایسی ن مساواتیں ہوں گی۔
اس لیے ہم ان سے وہ طریقہ معلوم کر سکتے ہیں جس میں طہ، طہ، ... طہ
وقت کے ساتھ بدلتے ہیں۔ ان مساواتوں کو استعمال کرنے میں ہمیں
صرف تفاعل ل کے جاننے کی ضرورت ہے اور اس لیے نظام کی

صرف توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کو جاننا ضروری ہے، نظام کی اندرونی
میکانیت کے علم کی ضرورت نہیں پڑتی۔ اس طرح دفعہ (۲۶۳) کا مجوزہ
مسئلہ حل ہو چکا اگر ہم لگرائنج کی مساواتیں حل کر سکیں۔

(۳۳۳)

توضیحی مثال

عام رقا ص۔ فرض کرو کہ ہم لگرائنج کی مساواتوں کو ایک سادہ مثال پر استعمال
کرتے ہیں چنانچہ عام رقا ص کی حرکت کے مسئلہ پر غور کرو۔ ایک استوار جسم حرکت
کرنے میں اس طور پر مقید ہے کہ ایک نقطہ و ثابت رہتا ہے اور خط و ث جو
و کو مرکز ثقل سے ملاتا ہے ایک انتصابی مستوی میں حرکت کرتا ہے۔ فرض کرو کہ
و ث کا میلان سمت انتصابی سے طہ ہے، تب نظام کا محل بالکلیہ مقرر
ہو جاتا ہے جوں ہی طہ کی قیمت معلوم ہو۔ دفعہ (۲۶۵) کی ترقیم میں
توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ حسب ذیل ہیں:

$$ت = \frac{1}{2} k g^2 \theta^2, \quad م = k g \theta \quad (۱-جم طہ)$$

جہاں م توانائی بالقوہ ہے اور
گ گ گیت۔ اس لیے

$$ل = \frac{1}{2} k g^2 \theta^2 - k g \theta \quad (۱-جم طہ)$$

$$\text{اس طرح جفل} = \frac{ک گ^۲ طہ}{جفل طہ}$$

لگرائنج کی مساوات

$$\text{فرت} = \left(\frac{\text{جفل}}{\text{جفل طہ}} \right) = \frac{\text{جفل}}{\text{جفل طہ}}$$

$$\text{ہو جاتی ہے} \quad ک گ^۲ = \frac{\text{فرت}^۲}{ک گ} \quad (۱-جم طہ)$$



شکل (۱۵۳)

یہ وہی مساوات ہے جو دفعہ ۲۴۵ میں حاصل ہوئی تھی اور اس سے حرکت معلوم کی جاسکتی ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ لگرائج کے طریقہ سے یہ ظاہر ہے کہ حرکت اس طریقہ پر منحصر نہیں ہے جو رقا ص کو لٹکانے کا ہے، صرف یہ شرط ہے کہ وہ مذکورہ بالا طریقہ پر حرکت کرنے پر مجبور ہو۔ مثلاً نتیجہ درست رہتا ہے اگر وہ کوئی ٹیکن ہی نہ ہو اور ڈوریوں کے ذریعہ قیود عائد کئے جائیں۔

۲۴۲۔ اب ہم دوسرے متبادل پر غور کریں گے۔ یہ ہو سکتا ہے کہ اگر ہم مف طہ، مف طہ، مف طہ... مف طہ کی اختیاری نمیتیں مقرر کریں تو حاصل شدہ نئی تشکیل ہر صورت میں ممکن تشکیل نہ ہو۔ یہ ہو سکتا ہے کہ بعض خاص رشتے ہوں جو پورے ہونے چاہئیں تاکہ میکا نیت کی باعث جو قیود ہیں ان میں کوئی خلل نہ پڑے۔

مثلاً اس تمثیل میں جو قبل ازیں استعمال ہو چکی ہے فرض کرو کہ ایک کمرہ کی چھت سے دو رسیاں لٹک رہی ہیں اور یہ کہ اگر ایک رسی کو ایک انچ کھینچا جاتا ہے تو اوپر کی میکا نیت دوسری رسی کو دو انچ اوپر چڑھنے پر مجبور کرتی ہے۔ فرض کرو کہ چھت کے نیچے رسیوں کے طول طہ، طہ سے تعبیر ہوتے ہیں۔ اب ایسا ہٹاؤ جس میں مف طہ = $\frac{1}{4}$ انچ اور مف طہ = $\frac{1}{5}$ انچ ممکن ہٹاؤ نہیں ہے کیونکہ اوپر کی میکا نیت ایسے ہٹاؤ کی اجازت نہیں دیتی۔ مف طہ، مف طہ میں ہمیشہ ربط

$$\text{مف طہ}_1 + \frac{1}{4} \text{ مف طہ}_2 = 0$$

ہونا چاہئے۔

عام صورت میں فرض کرو کہ میکا نیت کی باعث چند قیود عائد ہوتے ہیں (۳۳۲) ان قیود کی شکل

$$1, \text{ مف طہ}_1 + 1, \text{ مف طہ}_2 + \dots + 1, \text{ مف طہ}_n = 0 \quad (166)$$

$$2, \text{ مف طہ}_1 + 2, \text{ مف طہ}_2 + \dots + 2, \text{ مف طہ}_n = 0 \quad (167)$$

وغیرہ۔ تب مساوات (۱۶۵)

صرف اسوقت درست ہے جبکہ مف طہ، مف طہ، ... مف طہ، نشو
(۱۶۶) (۱۶۷) کو پورا کریں۔

لیکن ممکن ہٹاؤ کے لیے مف طہ، مف طہ، مف طہ، مف طہ... مف طہ
ایسے ہوں گے کہ یہ رشتے (۱۶۶) (۱۶۷) ... سب کے سب درست
ہوں گے۔ فرض کرو کہ ہم لہ، مہ، ... اور اکائی سے ضرب دیتے ہیں
اور جمع کرتے ہیں جہاں لہ، مہ، ... تا حال غیر معین مقدار میں ہیں، ہم ان کو
غیر معین ضارب کہہ سکتے ہیں۔ اب مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$\left[\frac{\text{جفل}}{\text{جفظه}} - \left(\frac{\text{جفل}}{\text{جفظه}} + \text{لہ} + \text{لہ} + \text{مہ} + \text{بہ} + \dots \right) \right] \text{مفطمہ}$$

$$+ \left[\frac{\text{فرز}}{\text{جف طه}} \left(\frac{\text{جفل}}{\text{جف طه}} \right) - \frac{\text{جفل}}{\text{جف طه}} + \text{له لیم} + \text{مه بپ} + \dots \right] \text{مف طه}$$

$$+ \dots + \left[\frac{\text{جفل}}{\text{جف طه ن}} \right] - \frac{\text{جفل}}{\text{جف طه ن}} + \dots + \frac{\text{جفل}}{\text{جف طه ن}}$$

$$+ \text{مربن} + \dots] \text{مفطن} = (169)$$

مقداریں مف طہ، مف طہ، مف طہ، ... مف طہ ن اختیاری نہیں ہیں۔
لیکن اگر نمونہ (۱۶۶) کے رشتے تعداد میں م ہوں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ مقدار
مف طہ، مف طہ، مف طہ، ... مف طہ ن میں سے تمام الا م کے اختیاری
ہیں اور ان مقداروں میں سے (ن - م) مقداروں کو اختیاری قیمتیں دیکر
باقی م مقداروں کو مساواتوں (۱۶۶)، (۱۶۷)، ... کے حل سے معلوم
کرنا چاہئے۔ اس طریقہ پر حاصل شدہ تشکیل یا ضرور ممکن تشکیل ہونی چاہئے
فرض کرو کہ ہم

مف طه $1+m$ مف طه $2+m$... مف طه n

(۳۳۵)

کو اختیاری قیمتیں دیتے ہیں اور پھر مساواتوں (۱۶۶) (۱۶۷) سے سے
مف طہ، مف طہ، مف طہ، مف طہ کی قیمتیں معلوم کرتے ہیں۔ نیز ہم م
غیر معین ضاربوں لہ، مہ، کا انتخاب کرتے ہیں اس طور پر کہ وہ م
مساواتوں

$$\frac{فر}{وزت} - \left(\frac{جفل}{جف طہ} \right) + \frac{جفل}{جف طہ} + لہ + مہ + ب + = ۰$$

(۱۶۰)

$$\frac{فر}{وزت} - \left(\frac{جفل}{جف طہ} \right) + \frac{جفل}{جف طہ} + لہ + مہ + ب + = ۰$$

(۱۶۱)

کو پورا کرتے ہیں جہاں لائقہ آتام ہیں۔ تب مساوات (۱۶۹) ہو جاتی ہے

$$\frac{فر}{وزت} - \left(\frac{جفل}{جف طہ} \right) + \frac{جفل}{جف طہ} + لہ + مہ + ب + = ۰$$

چونکہ مف طہ، مف طہ، مف طہ، مف طہ سب کے سب
اختیاری ہیں اس لیے ہم لے سکتے ہیں

$$مف طہ = مہ = مف طہ = مف طہ = = مف طہ$$

اور حاصل کر سکتے ہیں

$$\frac{فر}{وزت} - \left(\frac{جفل}{جف طہ} \right) + \frac{جفل}{جف طہ} + لہ + مہ + ب + = ۰$$

اسی طرح، ہم $M + A$ سے N تک تمام لاقحوں کے لیے وہی مساوات حاصل کر سکتے ہیں لیکن یہ مساوات لاقحوں اتمام کے لیے درست فرض کیجا چکی ہے (مقابلہ کرو مساواتوں (۱۷۰)..... (۱۷۱) [۱]۔ پس مساواتوں کا حسب ذیل مکمل نظام حاصل ہوتا ہے:

$$\text{فرت} \left(\frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} \right) - \frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} + \text{لہ} + \text{لہ} + \text{مہ} + \text{بہ} + \dots = 0$$

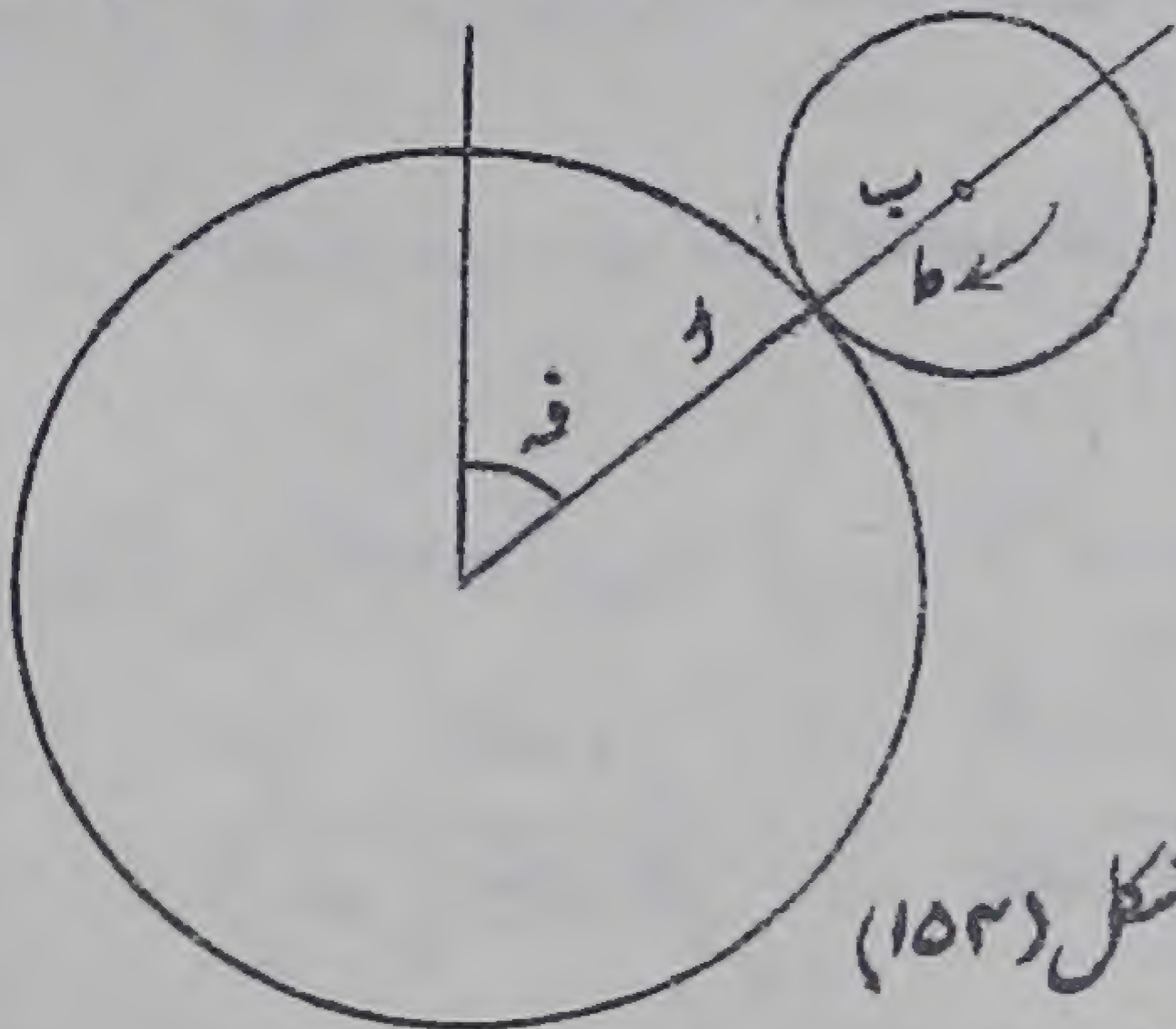
$$\text{فرت} \left(\frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} \right) - \frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} + \text{لہ} + \text{لہ} + \text{مہ} + \text{بہ} + \dots = 0$$

جس میں لاحقہ اتان ہیں۔ ان N مساواتوں سے M غیر معین ضابطوں لہ، مہ، کو ساقط کیا جائے تو $N - M$ مساواتیں باقی رہتی ہیں جن سے محدودوں کی تبدیلیاں معلوم کی جاسکتی ہیں۔

توضیحی مثالیں

(۳۳۶)

۱۔ نصف قطر کا ایک متجانس کرہ، نصف قطرب کے ایک ثابت کرہ کی بیرونی سطح پر بغیر پھسلے لڑھکتا ہے۔ حرکت معلوم کرو۔
فرض کرو کہ کسی لمحہ پر مرکزوں کا خط سمت انتصابی سے زاویہ کہ بناتا ہے اور فرض کرو کہ متحرک کرہ کی زاویہ رفتار طہ ہے۔ متحرک کرہ کے مرکز کی رفتار (۱ + ب) کہ ہے اور اس لیے



$$\text{ت} = \frac{1}{2} \text{ک} [(۱ + \text{ب}) \text{ک}^۲ + \frac{۲}{۵} \text{ل}^۲ \text{طہ}^۲]$$

اور توانائی بالقوہ ہے

$$\text{م} = \text{ک} \text{ج} (۱ + \text{ب}) \text{جم کہ}$$

$$\text{اس لیے ل} = \text{ت} - \text{م}$$

شکل (۱۵۴)

$$= \frac{1}{4}k(1+b)k^2 + \frac{1}{5}k^2\lambda^2 - k^2j(1+b) \text{ جم کہ } (1)$$

طہ اور کہ میں تغیرات اختیاری نہیں ہیں اور ہم انہیں جو چاہیں قیمتیں نہیں دے سکتے کیونکہ متحرک کرہ کے مرکز کی رفتار $(1+b)$ کہ ہے اور نیز λ طہ ہونی چاہئے کیونکہ کرہ زاویائی رفتار طہ سے بغیر پھیلے لڑھک رہا ہے۔
اس لیے

$$\lambda^2 = (1+b)k^2 \quad (ب)$$

یہ رشتہ ہر ممکن حرکت کے ہر لمحہ پر درست رہتا ہے اور اس لیے وقت کے لحاظ سے مکمل کرنے پر حاصل ہونا چاہئے

$$\lambda^2 = (1+b)k^2 + \text{مستقل}$$

اور اس لیے ہمیں فرض کرنا چاہئے کہ محدودوں طہ، کہ کی تبدیلیاں رشتہ

$$\lambda^2 \text{ مفطہ} = (1+b)k^2 \text{ مف کہ}$$

کے ذریعہ مربوط ہیں۔

اس طرح لگرائج کی مساواتیں ہیں

$$\frac{فر}{فرت} \left(\frac{جفل}{جفطہ} \right) - \frac{جفل}{جفطہ} + ل = 0$$

$$\frac{فر}{فرت} \left(\frac{جفل}{جفکر} \right) - \frac{جفل}{جفکر} - ل = (1+b) = 0$$

لہ کو ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$(1+b) \left[\frac{فر}{فرت} \left(\frac{جفل}{جفطہ} \right) - \frac{جفل}{جفطہ} \right] + \left[\frac{فر}{فرت} \left(\frac{جفل}{جفکر} \right) - \frac{جفل}{جفکر} \right] = 0$$

مساوات (1) سے اندراج کرنے پر یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$(1+b) \left[\frac{فر}{فرت} \left(\frac{1}{5}k^2\lambda^2 \right) - 1 \right] + \left[\frac{فر}{فرت} \left(\frac{1}{4}k^2(1+b)k^2 \right) - 1 \right] = 0$$

$$-k^2j(1+b) = 0$$

۱ طہ کی بجائے (۱ + ب) کہ رکھنے کے بعد حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۵}{۲} ک ۱ (۱ + ب) = \frac{۵}{۲} ک ۱ (۱ + ب) جب کہ$$

$$یا (۱ + ب) = \frac{۵}{۲} ک ۱ (۱ + ب) جب کہ$$

اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ متحرک کرہ کا مرکز اس اسراع کے ۵ اسراع کے ساتھ حرکت کرتا ہے جو ایک چلنے ذرہ کا ہوگا اگر یہ ذرہ نصف قطر ۱ + ب کے ایک کرہ پر نیچے پھلے۔

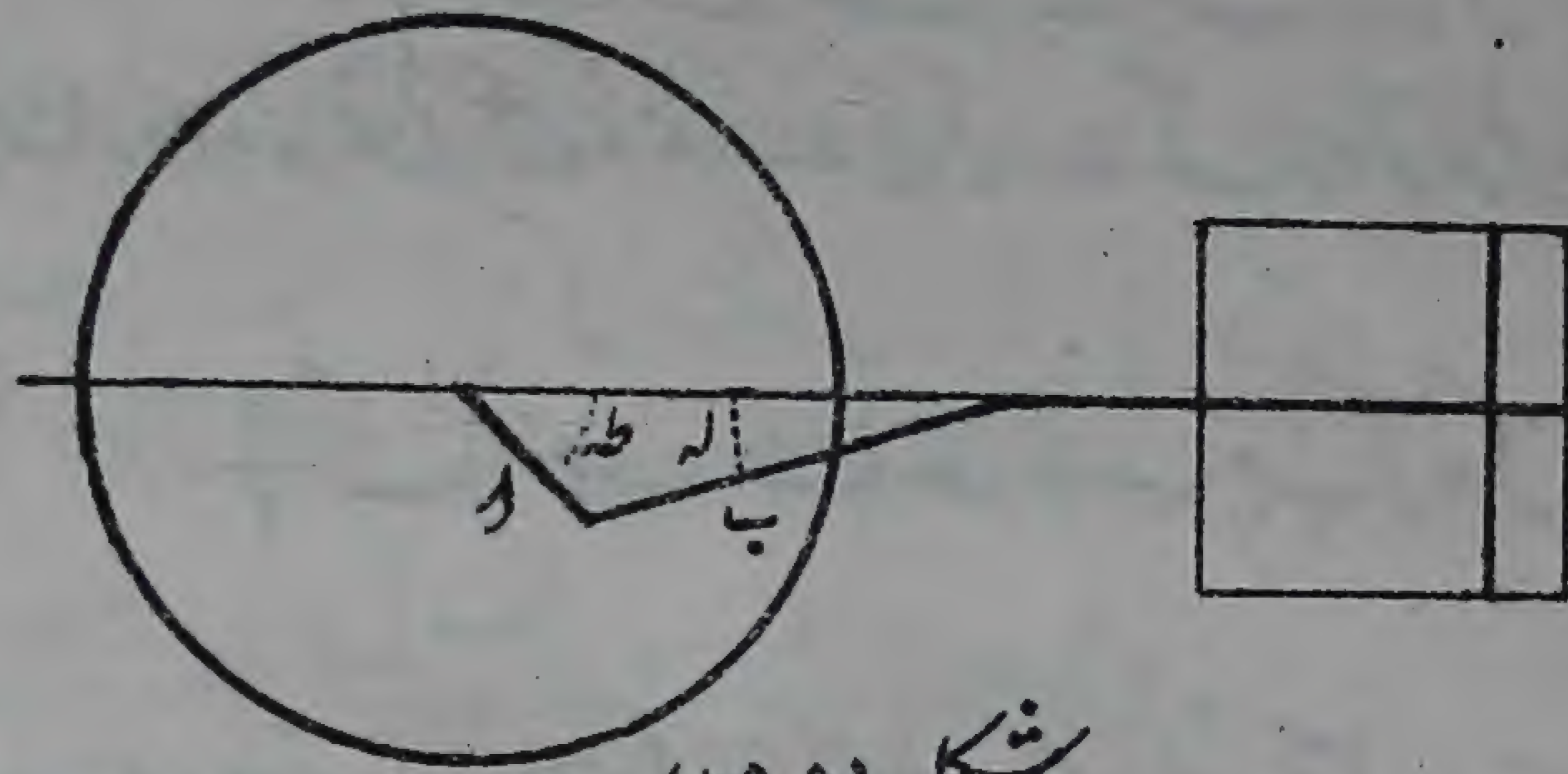
یہی نتیجہ طہ کو مساواتوں (۱) اور (ب) سے ساقط کرنے اور پھر کہ کو ایک واحد لگراج کا محدود سمجھنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔

۲۔ ایک اڑپہیہ ایک فٹارے سے جو ایک افقی اسطوانے میں حرکت کرتا ہے ایک کرنیک اور ڈنڈے کے ذریعہ مربوط ہے۔ جب انجن میں بھاپ نہیں ہوتی تو اڑپہیہ اپنے توازن کے محل میں ساکن رہتا ہے۔ اس کی حرکت جیکہ وہ ہٹا ہوا ہو معلوم کرو۔ فرض کرو کہ کرنیک اور ڈنڈے کے طول ۱ ب ہیں اور طہ کہ وہ زاوے ہیں جو وہ اڑپہیہ کے کسی محل میں سمت افقی سے بناتے ہیں۔

تب انجن کا محل پوری طرح معلوم ہوتا ہے جیکہ طہ اور کہ معلوم ہوں۔ طہ اور کہ کی قیمتوں سے انجن کا محل معلوم ہوتا ہے لیکن اگر ہم طہ اور کہ کو اختیاری قیمتیں دیں تو انجن کا ممکن محل حاصل ہونا ضروری نہیں ہے۔

اڑپہیہ، محور اور کرنیک کی گردش کی رفتار طہ ہے اور اس لیے اس حرکت کی توانائی باحرکت $\frac{۱}{۲} ع طہ^۲$ ہے جہاں ع، اڑپہیہ کے محور کے گرد انجن کے اس حصہ کا جمود کا معیار ہے۔ اگر ہم ڈنڈے کے مرکز ثقل کو اس کے وسطی نقطہ پر فرض کریں تو مرکز ثقل کے محدود جن کی پیمائش اڑپہیہ کے محور سے ہوئی ہو حسب ذیل ہیں:

$$افقی : ۱ جم طہ + \frac{۱}{۲} ب جم کہ$$

انتصابی : $\frac{1}{p}$ ب جب کہ

شکل (۱۵۵)

اس طرح ڈنڈے کے مرکز ثقل کی رفتار کے اجزائے ترکیبی ہیں :
 (۱ جب طہ \times طہ + $\frac{1}{p}$ ب جب کہ \times کنہ) افقاً
 انتصاباً $\frac{1}{p}$ ب حجم کہ \times کنہ

(۳۳۸)

اس لئے ڈنڈے کے مرکز ثقل کی پوری رفتار و،
 $و = (۱ جب طہ \times طہ + \frac{1}{p} ب جب کہ \times کنہ) + (\frac{1}{p} ب حجم کہ \times کنہ)$
 $= ۱ جب طہ \times طہ + ۱ ب جب طہ جب کہ \times طہ کنہ + \frac{1}{p} ب کنہ$
 سے حاصل ہوگی۔ ڈنڈے کی زاویہ رفتار کنہ ہے اور اس کے گھاؤ کا نصف قطر گ

$$گ^۲ = \frac{۱}{۳} (\frac{ب}{p})^۲ = \frac{۱}{۱۲} ب^۲$$

سے حاصل ہوگا۔

پس اگر ڈنڈے کی کمیت ک ہے تو اس کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2} ک (و^۲ + گ^۲ کنہ^۲) = \frac{1}{2} ک (۱ جب طہ \times طہ + ۱ ب جب طہ جب کہ \times طہ کنہ + \frac{1}{p} ب کنہ + \frac{۱}{۳} (\frac{ب}{p})^۲)$$

ہے۔

بالآخر، اڑپہیہ کے مرکز سے قشاری ڈنڈے کے سرے کا افقی فاصلہ

۱۔ حجم طہ + ب جم کہ ہے اور اس لیے فشارہ اور فشاری ڈنڈے کی رفتار ہے
 - (۱ جب طہ x طہ - ب جب کہ x کہ
 اگر فشارہ اور اس کے ڈنڈے کی کمیت گ ہو تو انجن کے اس حصہ کی
 توانائی بالحرکت
 $\frac{1}{2} g (1 \text{ جب طہ } x \text{ طہ } + \text{ ب جب کہ } x \text{ کہ})^2$
 ہے۔

اب پوری توانائی بالحرکت ت کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$2 \text{ ت} = \text{ع طہ} + \text{ک} (1 \text{ جب طہ } x \text{ طہ} + 1 \text{ ب جب طہ جب کہ } x \text{ کہ طہ} + \frac{1}{2} \text{ ب}^2 \text{ کہ}^2) + \text{ک} (1 \text{ جب طہ } x \text{ طہ} + \text{ ب جب کہ } x \text{ کہ})^2$$

توانائی بالقوہ م جس کی پیمائش معیاری تشکیل طہ = کہ =۔ سے ہوئی ہو
 م =۔ لی ج م جب (طہ + ص) - $\frac{1}{2} \text{ ک ج ب جب کہ (ب)}$
 ہے جہاں 'ک' اڑ پھیلا اور کرنیک کی کل کمیت ہے اور اس کے مرکز ثقل کے
 قطبی محدود م ص ہیں جبکہ طہ =۔
 طہ اور کہ کی تبدیلیاں غیر تابع نہیں ہیں۔ شکل پر سرسری نظر ڈالنے
 سے یہ معلوم ہو گا کہ رشتہ

(ج) ۱ جب طہ = ب جب کہ
 ہمیشہ قائم رہنا چاہئے اور اس کو تفرق کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر طہ اور کہ
 کو تقسیمی محدودوں کے طور پر لیا جائے تو ہمیں فرض کرنا چاہئے کہ وہ رشتہ
 $1 \text{ حجم طہ مف طہ - ب جم کہ مف کہ} =$
 کے ذریعہ مربوط ہیں۔

اس طرح لگرائج کی مساواتیں ہونگی:

$$\text{وزن} \left(\frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} \right) - \frac{\text{جفل}}{\text{جف طہ}} + 1 \text{ حجم طہ} = 0 \quad (د)$$

$$\frac{فر}{وزت} = \left(\frac{جفل}{جفک} \right) - \frac{جفل}{جفک} - لہ ب جم کہ = (ع)$$

(۳۳۹)

ان مساواتوں سے لہ کو ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے:

$$ب جم کہ \left[\frac{فر}{وزت} - \left(\frac{جفل}{جفک} \right) - \frac{جفل}{جفک} \right]$$

$$+ 1 جم طہ \left[\frac{فر}{وزت} - \left(\frac{جفل}{جفک} \right) - \frac{جفل}{جفک} \right] =$$

اور ل کی بجائے مساواتوں (۱) اور (ب) سے اس کی قیمت درج کرنے سے یہ مساوات طہ اور کہ کے اور ان کے تفرقی سروں (بلحاظ وقت) کے درمیان ایک مساوات ہو جاتی ہے۔ اس مساوات اور ہندسی ربط (ج)

(ف) ۱ جب طہ = ب جب کہ
سے ہم طہ اور کہ کو وقت کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں۔
مساوات (ف) استعمال کر کے ہم مساوات (ب) کو
م = ل ج م جب (طہ + صہ) - ۱ ک ج ۱ جب طہ
میں تبدیل کر سکتے ہیں۔

اڑ پیمہ پر مناسب اوزان کو اس طریقہ پر رکھا جاسکتا ہے کہ

$$صہ = ل ج م + ۱ ک ج ۱ =$$

اور اگر ایسا ہو جائے تو مرکز ثقل ہمیشہ ایک ہی ارتفاع پر رہے گا۔ اسے
انجن کو متوازن کرنا کہتے ہیں۔

اگر ہم یہ فرض کر لیں کہ انجن کو اس طریقہ پر متوازن کیا جا چکا ہے تو
م = ل اور اس لیے ل = ت۔ لیکن ہم لگرائج کی مساواتیں استعمال
کئے بغیر حرکت کو آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ ت کو
کل حرکت کی اشار میں مستقل رہنا چاہئے اور مساوات (ف) کے تفرق سے
حاصل ہوتا ہے

$$۱ جم طہ \times طہ = ب جم کہ \times کہ$$

اور اس لیے ہم مساوات (۱) کی بجائے رکھ سکتے ہیں

$$۲ت = ع ط^۲ + ک (اُجب ا ط^۲ \times ط^۲ + اُجب ط جم ط مس کہ \times ط^۲$$

$$+ \frac{۱}{۴} اُجم ط قط^۲ کہ \times ط^۲) + ک (اُجب ط ط^۲ \times ط^۲ + اُجم ط مس کہ \times ط^۲)$$

$$= ط^۲ [ع + ک اُجب ط جب (ط + کہ) قط کہ + \frac{۱}{۴} ک اُجم ط قط کہ$$

$$+ گ اُجب (ط + کہ) قط کہ]$$

یہ کل حرکت میں مستقل ہے لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ اس سے یہ نتیجہ نہیں نکلتا کہ طہ مستقل ہے۔ پس اگرچہ انجن کو اس طریقہ پر متوازن کیا گیا ہو کہ وہ کسی محل میں ساکن رہ سکے تاہم اس کا یکساں حرکت کرنا ضروری نہیں ہے اگر اسے حرکت میں لایا جائے۔

غیر بقائی نظامات کے لیے لکرائج کی مساواتیں

۲۷۳ — غیر بقائی نظاموں کے لیے دفعہ (۲۶۸) میں بتایا جا چکا ہے کہ مساوات (۱۵۶)

$$(۱۷۲) \quad \text{گ}^{\text{ت}} \text{مفل فرت} = .$$

کی بجائے مساوات

$$\text{گ}^{\text{ت}} [مفت + ۳ (لامف لا + مامف م$$

$$+ مے مفی) [فرت = . (۱۷۳)$$

رکھی جانی چاہئے۔

اب چونکہ حسب مساوات (۱۵۸)

$$لا = ف (طہ، طہ، طہ، ...، طہ ن)$$

اس لیے ہمیں حاصل ہوتا چاہئے

$$\text{مف لا} = لا - لا$$

(۳۴۰)

$$= f(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n) - f(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{n-1})$$

$$= \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ط}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ط}} + \dots$$

جہاں دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار میں نظر انداز کی گئی ہیں۔
اس طرح

3 (لا مفا + ما مفا + مے مفا) = علام مفا ط

+ طایف نظم + ... طایف طن

جہاں طاہ، 'طاہ'، ... 'طان' نظام کی تشکیل پر منحصر ہیں اور اس لیے وہ صرف طاہ، 'طاہ'، ... 'اطن' کے تفاعل میں ہے۔

مساوات (۱۷۳) اب ہو جاتی ہے

مکتب مفدت فرت + مکتب (طایف طیم + طایف طیم

$$+ \dots + \text{طایف (فرت)} = (۱۷۴)$$

جس طرح دفعہ (۲۷۰) میں ہم نے معلوم کیا تھا کہ

گفت منفی فرت

کو $\left\{ \frac{جف ل}{جف ط} - \frac{فر}{(جف ط)} \right\} \{ فرت$

میں مستحیل کیا جاسکتا ہے عین اُسی طرح مساوات (۱۷۴) کی پہلی رقم کو

گت { ح م ف ط } - [ج ف ت ط] - فر (ج ف ت ط) [ک ف ر ت]

میں متحیل کیا جاسکتا ہے۔ اس کو درج کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

(۱۴۳) اب چونکہ یہ وقت کی تمام ممکن سختوں کے لیے درست ہے اس لیے ہر لمحہ پر حاصل ہونا چاہئے

مف طہ [جفت - فرت (جف طہ) + طا] = ۰ (۱۴۵)

اگر مختلف طہ بغیر کسی قید کے متغیر ہو سکتے ہیں یعنی اگر مف طہ، مف طہ ۲، ... مف طہ ن کو ہم جو چاہیں قیمتیں دے سکیں تو ہر سر کو معدوم ہونا چاہئے اور اس صورت میں مساواتوں کا نظام ہوگا

$$\text{فرت} \left(\frac{\text{جفت}}{\text{جف طہ}} \right) - \frac{\text{جفت}}{\text{جف طہ}} - \text{طا} = ۰ \quad (۱۴۶)$$

لیکن اگر مف طہ، مف طہ ۲، ... مف طہ ن ان قیود کے پابند ہوں جو مساواتوں (۱۶۶)، (۱۶۷)، ... میں ظاہر کئے گئے ہیں تو حسب دفعہ ۲۷۲ ہم معلوم کرتے ہیں کہ مساواتوں کے اس نظام کی بجائے نظام

$$\text{فرت} \left(\frac{\text{جفت}}{\text{جف طہ}} \right) - \frac{\text{جفت}}{\text{جف طہ}} - \text{طا} + \text{لہ} + \text{لہ} + \text{مہ} + \text{بہ} + \dots = ۰$$

(۱۴۷)

کو رکھنا چاہئے۔

۲۷۴ — مساواتوں کے یہ نظام ان نظاموں میں تحویل ہوتے ہیں جو بقائی قوتوں کی خاص صورت میں قبل ازیں حاصل کئے جا چکے ہیں۔ کیونکہ اس صورت میں اس کام پر غور کرو جو ایک خفیف ہٹاؤ نہیں جس میں صرف طہ، بد لکر طہ، + مف طہ ہو جاتا ہے انجام پاتا ہے۔ یہ کام طا، مف طہ اور نیز وہ - جف طہ مف طہ ہے اور اس لیے

$$\text{طا} = - \frac{\text{جف م}}{\text{جف ط}}$$

$$\text{اس طرح } \frac{\text{جفت}}{\text{جف ط}} + \text{طا} = \frac{\text{جفت}}{\text{جف ط}} - \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ط}} = \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}}$$

$$\text{اور } \frac{\text{جفت}}{\text{جف ط}} = \frac{\text{جف (ل + م)}}{\text{جف ط}} = \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}}$$

کیونکہ م میں ط شامل نہیں ہوتا۔ اس طرح مساوات (۱۷۵) حسب سابق

$$\text{فر} = \left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}} \right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}} = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے اور اسی طریقہ پر مساواتیں (۱۷۷) ان مساواتوں میں مستحیل ہو سکتی ہیں جو ذرا بعد میں حاصل ہو چکی ہیں۔

(۳۴۲) لگرائج کی مساواتوں کو راست استحالہ سے حاصل کرنا

۱۷۵۔ لگرائج کی مساواتوں کو مساوات (۱۵۶) سے اخذ کرنے کی بجائے انہیں حرکت کی مساواتوں کے استحالہ سے راست حاصل کیا جاسکتا ہے۔

حسب سابق

$$\text{لا} = \text{ف} (\text{ط}، \text{ط}، \text{ط}، \dots، \text{ط}، \text{ن})$$

اور اس لیے تفرق کرنے پر

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ط}} \frac{\text{فر ط}}{\text{فر ت}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ط}} \frac{\text{فر ط}}{\text{فر ت}} + \dots$$

$$\text{یا } \text{لا} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}} \text{ط} + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}} \text{ط} + \dots (۱۷۸)$$

اس طرح لا ایک خطی تفاعل ہے ط، ط، ط، ... کا اور

(۱۷۹)

$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}}$$

نیز چونکہ

$$ت = \frac{۱}{۲} ح ک (لا^۲ + ما^۲ + نی^۲)$$

اس لیے ت حسب سابق طہ، طہ، ... کا ایک دو درجی تفاعل ہے جس میں طہ، طہ، ... بھی شامل ہیں۔ تفرق سے

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} = ح ک (لا \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + ما \frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + نی \frac{\text{جف نی}}{\text{جف طہ}})$$

یا مساوات (۱۷۹) سے

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} = ح ک (لا \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + ما \frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} + نی \frac{\text{جف نی}}{\text{جف طہ}})$$

اس طرح

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر ت}} \left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} \right) = ح ک (لا \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + ما \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} \frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} +$$

$$نی \frac{\text{فر نی}}{\text{فر ت}} \frac{\text{جف نی}}{\text{جف طہ}})$$

$$+ ح ک [لا \frac{\text{فر}}{\text{فر ت}} \left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} \right) + ما \frac{\text{فر}}{\text{فر ت}} \left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} \right) +$$

$$نی \frac{\text{فر}}{\text{فر ت}} \left(\frac{\text{جف نی}}{\text{جف طہ}} \right)] \dots \dots (۱۸۰)$$

چونکہ $\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}}$ ایک تفاعل ہے طہ، طہ، ... کا اس لیے

(۳۴۳)

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر ت}} \left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} \right) = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} \frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}} + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} \frac{\text{فر تہ}}{\text{فر ت}}$$

(۱۸۱) ... +

لیکن مساوات (۱۷۸) کے تفرق سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف}^1 \text{لا}}{\text{جف}^1 \text{طہ}} = \frac{\text{جف}^2 \text{لا}}{\text{جف}^2 \text{طہ}} + \frac{\text{جف}^2 \text{لا}}{\text{جف}^2 \text{طہ}} + \dots + \frac{\text{جف}^2 \text{لا}}{\text{جف}^2 \text{طہ}} \quad (۱۸۲)$$

مساواتوں (۱۸۱) اور (۱۸۲) کے بائیں جانبی ارکان مماثل ہیں

اس لیے

$$\frac{\text{جف}^1 \text{لا}}{\text{جف}^1 \text{طہ}} = \left(\frac{\text{جف}^1 \text{لا}}{\text{جف}^1 \text{طہ}} \right) \frac{\text{فر}}{\text{فر}^1}$$

اور مساوات (۱۸۰) کی آخری سطر

$$\text{حک} \left(\frac{\text{لا} \text{جف}^1 \text{لا}}{\text{جف}^1 \text{طہ}} + \frac{\text{نا} \text{جف}^1 \text{نا}}{\text{جف}^1 \text{طہ}} + \frac{\text{نی} \text{جف}^1 \text{نی}}{\text{جف}^1 \text{طہ}} \right)$$

میں تحویل ہوتی ہے اور اس کی قیمت

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف}^1 \text{طہ}} \text{حک} \left[\frac{1}{\text{فر}^1} (\text{لا}^1 + \text{نا}^1 + \text{نی}^1) \right]$$

$$\frac{\text{جف}^1 \text{ت}}{\text{جف}^1 \text{طہ}}$$

ہے یا

اب مساوات (۱۸۰) ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر}^1} \left(\frac{\text{جف}^1 \text{ت}}{\text{جف}^1 \text{طہ}} - \frac{\text{جف}^1 \text{ت}}{\text{جف}^1 \text{طہ}} \right)$$

$$= \text{حک} \left(\frac{\text{فر}^1 \text{لا}}{\text{فر}^1 \text{جف}^1 \text{طہ}} + \frac{\text{فر}^1 \text{نا}}{\text{فر}^1 \text{جف}^1 \text{طہ}} + \frac{\text{فر}^1 \text{نی}}{\text{فر}^1 \text{جف}^1 \text{طہ}} \right)$$

$$+ \frac{\text{فر}^1 \text{ی}}{\text{فر}^1 \text{جف}^1 \text{طہ}} \left(\frac{\text{جف}^1 \text{ی}}{\text{جف}^1 \text{طہ}} \right)$$

لیکن حرکت کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \text{حک} \frac{\text{فر}^1 \text{لا}}{\text{فر}^1 \text{ت}} \text{، وغیرہ}$$

اس لیے مساوات مندرجہ بالا ہو جاتی ہے

$$\text{فرت} \frac{(\text{جف ت})}{(\text{جف طہ})} - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} = \text{لا} \frac{(\text{جف لا})}{(\text{جف طہ})}$$

$$+ \text{ما} \frac{(\text{جف ما})}{(\text{جف طہ})} + \text{ے} \frac{(\text{جف ی})}{(\text{جف طہ})}$$

اگر ہم نظام میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کریں جس میں طہ، بڑھکر طہ،
+ مف طہ، طہ، بڑھکر طہ، + مف طہ، طہ، بڑھکر طہ، + مف طہ،
وغیرہ ہو جائے تو انجام پائے ہوئے کام کے لیے جو دو مختلف حلے
حاصل ہوتے ہیں ان کو ایک دوسرے کے مساوی رکھنے سے حاصل
ہوتا ہے :

(۳۴۴)

$$\text{طا} \frac{(\text{مف طہ})}{(\text{جف طہ})} + \text{ظا} \frac{(\text{مف طہ})}{(\text{جف طہ})} + \dots + \dots$$

$$= \text{لا} \frac{(\text{مف لا})}{(\text{جف طہ})} + \text{ما} \frac{(\text{مف ما})}{(\text{جف طہ})} + \text{ے} \frac{(\text{مف ی})}{(\text{جف طہ})}$$

صفحہ (۴۹۰) میں مف لا کی جو قیمت حاصل ہوئی ہے اس کا اندراج
کرنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{طا} \frac{(\text{مف طہ})}{(\text{جف طہ})} + \text{ظا} \frac{(\text{مف طہ})}{(\text{جف طہ})} + \dots + \dots$$

$$= \text{لا} \frac{(\text{جف لا})}{(\text{جف طہ})} + \text{مف طہ} \frac{(\text{جف لا})}{(\text{جف طہ})} + \text{مف طہ} \frac{(\text{جف لا})}{(\text{جف طہ})}$$

$$+ \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots$$

$$= \text{مف طہ} \frac{(\text{جف لا})}{(\text{جف طہ})} + \text{ما} \frac{(\text{جف لا})}{(\text{جف طہ})} + \text{ے} \frac{(\text{جف لا})}{(\text{جف طہ})}$$

$$+ \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots$$

$$= \text{مف طہ} \frac{(\text{فرت})}{(\text{جف ت})} - \frac{(\text{جف ت})}{(\text{جف طہ})} + \dots + \dots$$

$$+ \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots$$

اور مساوات

$$3 \text{ مف طم} = \left[\frac{\text{فرت}}{\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طم} } \right)} - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طم} } - \text{طا} \right] = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے۔
یہ مساوات وہی ہے جو (۱۷۵) ہے اور لگراج کی مساواتوں کی مختلف شکلیں حسب سابق اخذ کی جاسکتی ہیں۔

وہ کے والی قوتوں کے لیے لگراج کی مساواتیں

۲۷۶۔ فرض کرو کہ دیکھوں کا ایک نظام چھوٹے وقفہ ت = ت تات
= ت عمل کرتا ہے۔ فرض کرو کہ طم، طم، طم، ...، طم غیر تابع محدود
ہیں اور اس لیے لگراج کی مساواتیں ہیں:

$$\frac{\text{فرت}}{\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طم} } \right)} - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طم} } = \text{طا، وغیرہ}$$

اگر ہم اس مساوات کو فرت سے ضرب دیں اور ت = ت سے ت = ت
تک تکمیل کریں تو

$$\frac{\text{فرت}}{\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طم} } \right)} - \text{فرت} = \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طم} } \text{فرت} = \text{کے طا فرت}$$

پہلی رقم کی قیمت ہے

$$\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طم} } \right) \text{ت} = \left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طم} } \right) \text{ت} = \text{ت}$$

اور جب وقفہ ت تات کو انتہائی چھوٹا کیا جاتا ہے تو جملہ بالا صرف

اس تبدیلی کی پیمائش کرتا ہے جو دیکے نے $\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طم} }$ میں پیدا (۳۴۵)
کی ہے۔

دوسری رقم $\frac{جفت}{جفت}$ فرت میں مکمل جفت محدود ہے
 اور اس لیے جب وقت کے وقفہ کو لا انتہا چھوٹا فرض کیا جاتا ہے تو
 یہ رقم بھی وقت کے ساتھ معدوم ہوگی۔ اس طرح مساوات ہو جاتی ہے:

$$\frac{جفت}{جفت} = \frac{جفت}{جفت} \text{ میں تبدیلی = } \frac{جفت}{جفت} \text{ طا فرت (۱۸۳)}$$

۲۷۷۔ اگر ف معمولی قوت ہو جو وقفہ تاتا ہے میں دہکے کی طرح
 عمل کرے تو ہم $\frac{جفت}{جفت}$ فرت کو دہکے کہتے ہیں۔ تعمیم شدہ محدود $\frac{جفت}{جفت}$ کے
 جواب میں

$\frac{جفت}{جفت}$ طا فرت

کو تعمیم شدہ دہکے کہا جاتا ہے۔ اس طرح مساوات (۱۸۳) شکل

$\frac{جفت}{جفت}$ میں تبدیلی = تعمیم شدہ دہکے
 میں حاصل ہوتی ہے۔
 رشتہ

کسی ذرہ کے معیار حرکت میں تبدیلی = ذرہ پر دہکے
 کے ساتھ مساوات بالائی مشابہت ہونے کی وجہ سے $\frac{جفت}{جفت}$ کو تعمیم شدہ
 معیار حرکت کہتے ہیں جو محدود $\frac{جفت}{جفت}$ کے متناظر ہے۔ پس اصطلاحات
 ”دہکے“ اور ”معیار حرکت“ کے ان معنوں کے ساتھ رشتہ
 معیار حرکت کی تبدیلی = دہکے
 تعمیم شدہ محدودوں میں بھی درست ہے۔

جب ہمارے محدود 'ما' ی ہوں جو فضاء میں ایک متحرک ذرہ کے محدود
ہیں تو تقسیم شدہ معیار حرکت بلاشبہ معیار حرکت کے معمولی اجزائے ترکیبی
کے مماثل ہو جائیں گے۔ چنانچہ

$$ت = \frac{1}{p} (لا^2 + ما^2 + ني^2)$$

جفت = ک لا، وغیرہ

اس لیے

استوار جسم کے لیے یو لہر کی مساواتیں

(FV4)

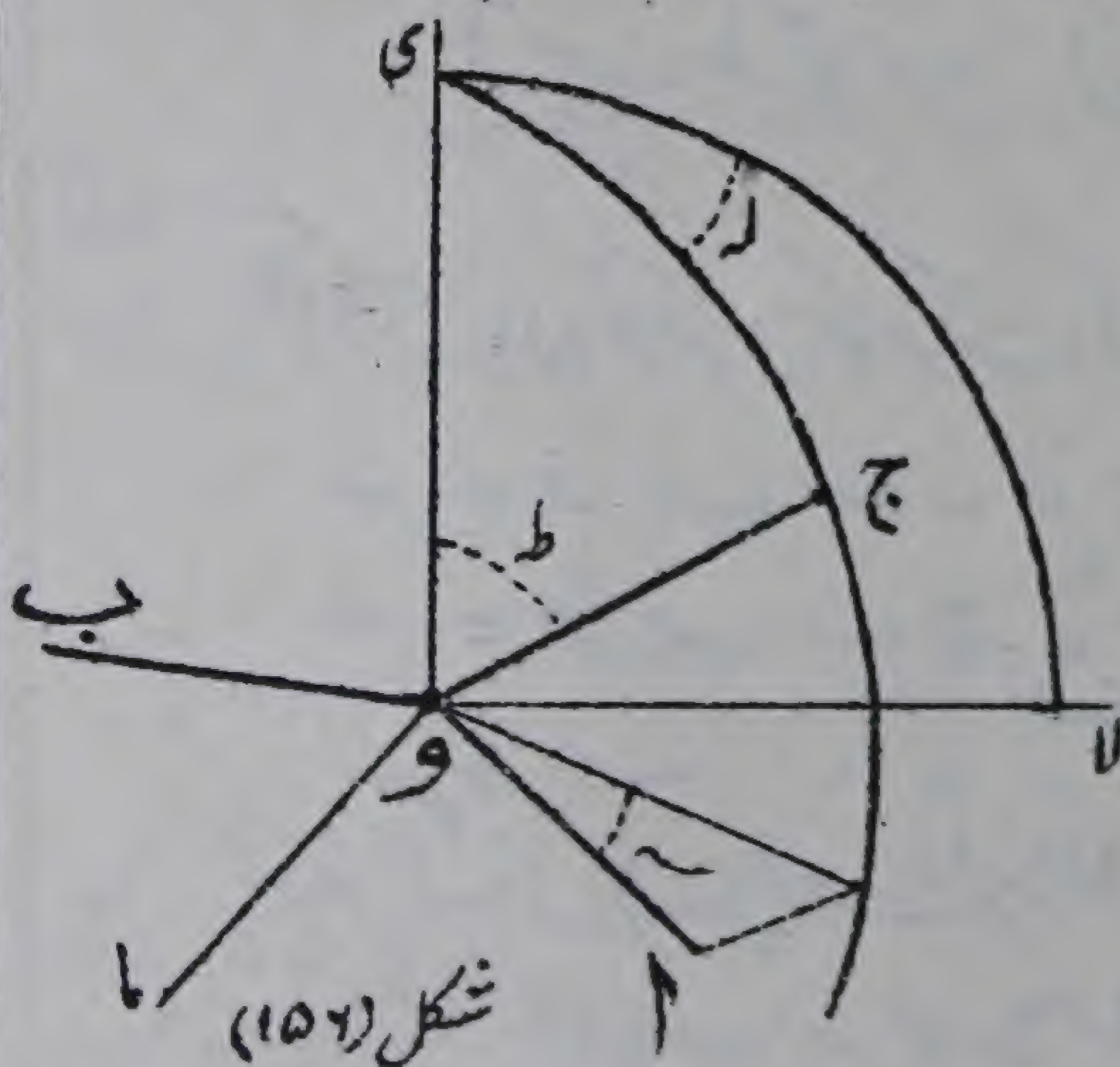
۲۷۸ — یولر کی مساواتیں (دفعہ ۲۵۳) لگرائج کی مساواتوں سے اخذ کی جا سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ ایک استوار جسم ہے جس میں نقطہ و ثابت ہے
اور نیز یہ نقطہ فضا میں ثابت ہے یا وہ جسم کا مرکز ثقل ہے۔ فرض کرو کہ
اس استوار جسم کے معیار نقطہ و پر کے جمود کے صدر محوروں کے گرد
'ا' 'ب' 'ج' ہیں۔ تب اگر ان محدودوں کے گرد گردش کے اجزائے
ترکیبی 'سہ' 'سہ' 'سہ' ہوں تو حسب دفعہ ۲۴۸ حاصل ہوتا ہے :

$$\text{ت} = \frac{1}{4} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \quad (184)$$

لکھنا بھی محیدوں کے طور پر

فرض کرو کہ جسم کے تیسرے محور
و ج کے گردی قطبی محدودہ لہیں
اور ایک تیسرا محدودہ جسم کے
محور اول و ۱ اور اس مستوی کا
درمیانی زاویہ ہے جو و ج اور
محور طہ = ۰ میں سے گذرتا ہے
یعنی مستوی ج و ی -



شکل (۱۵۶)

ہے۔ تب محدود سا کے لیے لگراج کی مساوات ہے:

$$(182) \quad \frac{\text{جف ت}}{\text{جف س}} - \left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف س}} \right) = \frac{\text{جف ت}}{\text{جف س}} = \text{سا}$$

مساوات (۱۸۲) کے تفرق سے حاصل ہوتا ہے:

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف س}} = \left(\frac{\text{جف س}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف س}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف س}}{\text{جف س}} \right) = \text{سا}$$

ج س = مساواتوں (۱۸۵) سے اندراج کرنے پر۔

نیز

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف س}} = \left(\frac{\text{جف س}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف س}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف س}}{\text{جف س}} \right) = \text{سا}$$

$$= \left(\frac{\text{جف س}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف س}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف س}}{\text{جف س}} \right) = \text{سا}$$

$$+ \left(\frac{\text{جف س}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف س}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف س}}{\text{جف س}} \right) = \text{سا}$$

$$= \left(\frac{\text{جف س}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف س}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف س}}{\text{جف س}} \right) = \text{سا}$$

بالآخر سامف س وہ کام ہے جو بیرونی قوتیں چھوٹی گردش مف س میں انجام دیتی ہیں اور اس لیے بموجب دفعہ (۱۲۱) سا محور و ج کے گرد ان قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ ن کے مساوی ہے۔

ان تمام اندراجات کو عمل میں لانے پر مساوات (۱۸۶) ہو جاتی ہے: (۳۴۸)

$$\text{ج} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} - \left(\frac{\text{ب}}{\text{س}} - \frac{\text{س}}{\text{س}} \right) = \text{ن}$$

جو یو لریکی تیسری مساوات ہے اور دوسری دو مساواتوں کو تشاکل سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

چھوٹے استہزاز

۲۷۹ — فرض کرو کہ کسی نظام کے تعمیم شدہ محدود طہ، طہ، طہ، طہ، طہ ہیں اور فرض کرو کہ یہ تمام محدود غیر تابع ہیں اور اس لیے طہ، طہ، طہ، طہ، طہ کی

قیمتوں کے کسی جٹ سے نظام کی ایک ممکن تشکیل حاصل ہوتی ہے۔
فرض کرو کہ تشکیل

$$\text{طہ}_1 = \text{طہ}_2, \text{طہ}_2 = \text{طہ}_3, \dots, \text{طہ}_n = \text{طہ}_{n+1} \quad (۱۸۷)$$

توازن کی تشکیل ہے۔ اب اگر

$$\text{لہ}_1 = \text{طہ}_1, \text{لہ}_2 = \text{طہ}_2, \dots, \text{لہ}_n = \text{طہ}_n$$

تو مقداروں لہ، لہ، لہ، ...، لہ کو نظام کے تعمیم شدہ محدودوں کے طور پر لیا جاسکتا ہے اور یہ محدود توازن کے محل میں سب کے سب معدوم ہونگے۔ فرض کرو کہ توازن کی تشکیل میں توانائی بالقوہ کی قیمت گ سے تعبیر کی گئی ہے۔ کسی دوسری تشکیل میں توانائی بالقوہ کے جملہ کوٹیلر کے مسئلہ سے شکل

$$ک = ک + \frac{\text{جفک}}{\text{جف طہ}_1} + \frac{\text{جفک}}{\text{جف طہ}_2} + \dots + \frac{\text{جفک}}{\text{جف طہ}_n}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\text{جفک}}{\text{جف طہ}_1} + \frac{\text{جفک}}{\text{جف طہ}_2} + \dots + \frac{\text{جفک}}{\text{جف طہ}_n} \right)$$

میں پھیلا یا جاسکتا ہے جہاں تمام تفرقی سرور کو توازن کے محل میں محسوب کیا گیا ہے۔ لیکن توازن کے اس محل میں دفعہ ۱۳۵ کے مسئلہ کی رو سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جفک}}{\text{جف طہ}_1} = \dots = \frac{\text{جفک}}{\text{جف طہ}_n}$$

اس لیے ک کی قیمت کو شکل

(۳۴۹)

$$ک = ک + \frac{1}{2} \left(\frac{\text{جفک}}{\text{جف طہ}_1} + \frac{\text{جفک}}{\text{جف طہ}_2} + \dots + \frac{\text{جفک}}{\text{جف طہ}_n} \right)$$

میں لکھا جاسکتا ہے جس میں لہ، لہ، ...، لہ کی وہ قوتیں جو دو سے بڑھیں

نظر انداز کر دی گئی ہیں کیونکہ ہم صرف ان حرکتوں پر توجہ محدود رکھتے ہیں جن میں لم، لم، ... سب کے سب چھوٹی مقدار میں ہیں۔
توازنائی بالحرکت حسب سابق (دفعہ ۲) لن، لن، لن، ... لن کا ایک دو درجی تفاعل ہے۔ فرض کرو کہ

$$ت = ب_۱ لن + ب_۲ لن + ... + ب_n لن \quad (۱۸۹)$$

سر ب، ب، ... ب، لن فی الحقیقت ط، ط، ... ط، لن کے تفاعلات ہیں لیکن ہم ان کی قیمتوں کو ان قیمتوں کے مساوی سمجھ سکتے ہیں جو توازن کی تشکیل میں حاصل ہوتی ہیں اور اس لیے ان کو مستقل مقداروں کے طور پر سمجھا جاسکتا ہے۔
۲۸۰۔ اب ن متغیروں لا، لا، لا، ... لان کے دو درجی دو تفاعلوں پر غور کرو جو حسب ذیل ہیں:

$$ف (لا، لا، ... لان) = لا_۱ لا + لا_۲ لا + ... + لا_n لان$$

$$ف (لا، لا، ... لان) = ب_۱ لا + ب_۲ لا + ... + ب_n لان$$

چونکہ تفاعل ت جس کی تعریف مساوات (۱۸۹) سے کی گئی ہے بالضرور مثبت ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ف (لا، لا، ... لان) کو لا، لا، لا، ... لان کی تمام قیمتوں کے لیے مثبت ہونا چاہئے۔ پس جبر و مقابلہ کے ایک مشہور مسئلہ سے ہم حسب ذیل نمونے کا ایک استحالہ معلوم کر سکتے ہیں:

$$\left\{ \begin{array}{l} لا = کہ_۱ ضا + کہ_۲ ضا + ... + کہ_n ضا \\ لا = کہ_۱ ضا + کہ_۲ ضا + ... + کہ_n ضا \end{array} \right. \quad (۱۹۰)$$

جس میں سرکہ وغیرہ حقیقی ہیں۔ یہ استحالہ ایسا ہے کہ ف اور ف حسب ذیل نمونے کے جملوں میں مستحیل ہوتے ہیں:

$$ف (لا، لا، لا، لا، لا) = عم ضا + عم ضا + ... + عم ضا$$

$$ف (لا، لا، لا، لا، لا) = بہ ضا + بہ ضا + ... + بہ ضا$$

اور تمام سر بہ، بہ، بہ، بہ، بہ مثبت ہوں گے۔

اس مسئلہ کے جبریہ ثبوت علم التحلیل کے مقالات یا سامن کی باہر الجبر میں ملیں گے۔ یہ مسئلہ ایک ہندسی تعبیر جس میں متغیروں کی تعداد تین ہے غور کرنے سے فوراً سمجھ میں آجائے گا۔ متغیروں کو لا، ما، ی لینے سے مساواتیں

(۳۵۰)

$$ف (لا، ما، ی) = ا، ف (لا، ما، ی) = ا$$

(۱۹۱)

ہم مرکز دو درجیوں کی مساواتیں ہوں گی اور چونکہ لا، ما، ی کی تمام قیمتوں کے لیے ف مثبت ہے اس لیے دو سرا دو درجی ایک ناقص نما ہوگا۔ یہ معلوم ہے کہ اگر دو ہم مرکز دو درجیوں میں سے ایک ناقص نما ہو تو ایسے دو درجی، باہم مزدوج وتروں کا ایک حقیقی جٹ مشترک رکھتے ہیں۔ اس نمونے کے استحالہ سے جس کو مساوات (۱۹۲) سے بیان کیا گیا ہے ہم محدودوں کے محوروں کو ان وتروں پر منتقل کر سکتے ہیں اور تب دو درجیوں کی مساواتیں مطلوبہ اشکال

$$عم ضا + عم ضا + عم ضا = ا، بہ ضا + بہ ضا + بہ ضا = ا$$

(۱۹۲)

میں حاصل ہوتی ہیں۔

[معمولی استدلال سے اس ہندسی مسئلہ کی صداقت ظاہر ہوگی کہ ایک ناقص نما اور ایک دو سرا دو درجی ہمیشہ باہم مزدوج وتروں کا ایک حقیقی جٹ مشترک رکھتے ہیں۔ کیونکہ ایک حقیقی خطی استحالہ سے ناقص نما ایک کرد میں مستحیل ہوگا اور دو سرا دو درجی ایک نئے لیکن تاہم حقیقی دو درجی میں مستحیل ہوگا۔ اب

اس حقیقی دو درجی کے صدر محور، کرہ اور دو درجی کے لیے باہم مزدوج حقیقی وتر ہیں اور اُلٹا استحالہ کرنے سے باہم مزدوج حقیقی وتر باہم مزدوج حقیقی وتر رہتے ہیں۔
اد پر ہم نے جبر یہ طور پر ثابت کیا ہے کہ مساواتیں (۱۹۱) مساواتوں (۱۹۲) میں مستحیل ہو سکتی ہیں لیکن یہ ظاہر ہے کہ یہ جبر یہ ثبوت صرف تین متغیروں کی صورت پر محدود نہیں ہے اس لیے مسئلہ بالامتغیروں کی کسی تعداد کے لیے درست ہونا چاہیے۔

۲۸۱۔ اس مسئلہ سے ثابت ہوتا ہے کہ ہم نئے محدود سہ سہ سہ سہ معلوم کر سکتے ہیں جو محدودوں لہ، لہ، لہ، لہ، لہ، لہ سے رشتوں

$$لہ = کہ سہ + کہ سہ + کہ سہ + کہ سہ + کہ سہ + کہ سہ \quad (۱۹۳)$$

$$لہ = کہ سہ + کہ سہ + کہ سہ + کہ سہ + کہ سہ + کہ سہ \quad (۱۹۴)$$

کے ذریعہ مربوط ہوں اس طور پر کہ اگر ان محدودوں کی رقوم میں بیان کیا جائے تو توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت حسب ذیل اشکال اختیار کریں:

$$ک = ک + عہ سہ + عہ سہ + عہ سہ + عہ سہ + عہ سہ + عہ سہ \quad (۱۹۵)$$

$$ت = تہ سہ + تہ سہ + تہ سہ + تہ سہ + تہ سہ + تہ سہ \quad (۱۹۶)$$

محدودوں سہ، سہ، سہ، سہ، سہ، سہ کو نظام کے صدر محدود کہا جاتا ہے، بعض مصنف ان کو طبعی محدود بھی کہتے ہیں۔
ان محدودوں کی رقوم میں لگراج کی مساواتیں ہیں:

(۳۵۱)

$$\frac{فر}{فر} = \left(\frac{جفت}{جفت سہ} \right) - \frac{جفت}{جفت سہ} = \frac{جفت ک}{جفت سہ}، وغیرہ$$

ہیں اور یہ مساواتیں

$$تہ = \frac{فر سہ}{فر سہ} = عہ سہ، وغیرہ$$

ہو جاتی ہیں۔

قائم توازن

۲۸۲۔ اگر عم مثبت ہے تو فرض کرو کہ ہم $\frac{1}{2} = \frac{1}{1}$ کہہ رہے ہیں اور اس لیے کہ حقیقی ہوگا۔
مساوات اب ہے

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

اور اس کا حل ہے

(۱۹۸) $\frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$ جم (کہ ت - صہ)
جو دفعہ (۲۰۸) کے مطابق ہے۔ اس طرح حرکت تعدد کی سادہ موسیقی حرکت ہے۔ اگر تمام سرعہ، عم، ...، عن مثبت ہوں تو مساواتوں کے مکمل حل کی شکل

$\frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$ جم (کہ ت - صہ)،
 $\frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$ جم (کہ ت - صہ)، وغیرہ
ہوگی اور کسی ذرہ کا محدود لا جس کی قیمت توازن کے محل میں لا ہے حسب ذیل ہوگی:

$$لا = لا + (طہ - طہ) \frac{جف لا}{جف طہ} + (طہ - طہ) \frac{جف لا}{جف طہ} + \dots$$

$$= لا + لا + لا + \dots + \frac{جف لا}{جف طہ} + \frac{جف لا}{جف طہ} + \dots$$

$لا + لا + لا + \dots + (کہ ت - صہ) + (کہ ت - صہ) + \dots$
جہاں 'ب'، 'ب'، ... نئے مستقلات ہیں۔
پس کسی واحد ذرہ کی حرکت وہ حرکت ہوگی جو متعدد سادہ موسیقی

حرکتوں سے مرکب ہوگی۔

۲۸۳۔ کسی صدر محدود سے، کے جواب میں تو انائی بالقوہ $\frac{۱}{۲}$ سے $\frac{۱}{۲}$ ہے یا اگر ہم سے، کو مساوات (۱۹۸) سے حاصل کریں تو یہ تو انائی بالقوہ $\frac{۱}{۲}$ سے $\frac{۱}{۲}$ جم (کہ ت - ص) ہے۔

ہے۔ اسی طرح اس صدر ارتعاش کے جواب میں تو انائی بالحرکت $\frac{۱}{۲}$ یا

یہ $\frac{۱}{۲}$ کم جب $\frac{۱}{۲}$ (کہ ت - ص)

ہے۔ اگر ایک طویل وقت کے لیے اوسط لیا جائے تو جم (کہ ت - ص)

اور جب $\frac{۱}{۲}$ (کہ ت - ص) کی اوسط قیمتیں $\frac{۱}{۲}$ ہیں اور اس لیے اوسط تو انائی بالقوہ اور اوسط تو انائی بالحرکت علی الترتیب

$\frac{۱}{۲}$ عم $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۲}$ یہ $\frac{۱}{۲}$ کہ

ہیں اور یہ مساوی ہیں کیونکہ کہ $\frac{۱}{۲}$ = عم۔ پس کسی ارتعاش میں اوسط تو انائی بالقوہ اور اوسط تو انائی بالحرکت مساوی ہوتی ہیں۔

غیر قائم توازن

۲۸۴۔ فرض کرو کہ مساوات (۱۹۵) کے سروں میں سے کوئی ایک سر (فرض کرو عم) منفی ہے۔ فرض کرو کہ ہم $\frac{۱}{۲}$ = عم کہ رکھتے ہیں تو کہ حقیقی ہوگا۔ اب مساوات (۱۹۷) شکل

فرض $\frac{۱}{۲}$ = کہ $\frac{۱}{۲}$ سے

اختیار کرتی ہے اور اس کا حل ہے

$$س = ا + ب + ج + د + ...$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ س وقت کے ساتھ لا انتہا بڑھتا ہے اور قیمت س = کے گرد اہتزاز نہیں کرتا۔ اس طرح حرکت غیر قائم ہے اور اب ہم دیکھتے ہیں کہ حرکت صرف اس وقت قائم ہو سکتی ہے جبکہ بیرونی قوتیں ... عین میں سے سب سر مشبت ہوں۔ بالفاظ دیگر

قائم توازن کے لیے توانائی بالقوہ توازن کی تشکیل میں مطلقاً اقل ہونی چاہئے۔

یہ وہ نتیجہ ہے جس کو بغیر ثبوت کے دفعہ ۵۳ میں بیان کیا جا چکا ہے۔

(۳۵۳)

قسری ارتعاش

۲۸۵۔ وہ اہتزاز جن پر ہم اب تک غور کرتے رہے ہیں اس نمونے کے ہیں جو آزاد ارتعاش کے طور پر مشہور ہیں یعنی کل عاملہ قوتیں خود نظام کی توانائی بالقوہ سے پیدا ہوتی ہیں۔

لیکن اہتزاز کا ایک اور نمونہ پیش ہوتا ہے جبکہ نظام پر ان قوتوں کے علاوہ جو خود اس کی توانائی بالقوہ سے پیدا ہوتی ہیں بیرونی جانب سے دوسری قوتیں بھی عمل کر رہی ہوں۔ ان اہتزازوں کو قسری اہتزاز کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ نظام کی توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت علی الترتیب مساواتوں (۱۹۵) اور (۱۹۶) سے حاصل ہوئی ہیں اور یہ کہ کسی لمحہ پر عمل کرنے والی بیرونی قوتوں کا نظام ایسا ہے کہ ایک چھوٹے ہٹاؤ میں انجام پایا ہوا کام

$$س = ا + ب + ج + د + ...$$

ہے۔

اب اس نظام کے لیے لگرائج کی مساواتیں ہیں:

$$\frac{\text{فرق}}{\text{جفت}} = \left(\frac{\text{جفت}}{\text{جفت}} \right) - \frac{\text{جفت}}{\text{جفت}} = \frac{\text{جفت}}{\text{جفت}} + \frac{\text{جفت}}{\text{جفت}} + \text{سا} + \text{وغیرہ}$$

یہ مساوات ہو جاتی ہے:

$$\text{۲ بہ} \frac{\text{فرق}}{\text{جفت}} = \text{۲ عم} + \text{سا} \quad (۱۹۹)$$

جس میں سا اب وقت کا ایک تفاعل ہے۔ اس مساوات کو ان قاعدوں کے ذریعہ حل کیا جاسکتا ہے جو تفسیقی مساواتوں کی کسی کتاب میں مذکور

ہوتے ہیں۔ اگر حسب سابق کہ $\frac{\text{عم}}{\text{بہ}} = ۱$ لیا جائے تو عام حل ہے:

$$\text{سا} = \text{ا جم} (\text{کہ ت - صم}) + \frac{\text{ا}}{\text{۲ عم بہ}} \quad \text{ت} = \text{ت} \quad \text{ت} = \text{ت} \quad \text{ت} = \text{ت}$$

تکمل کی پچھلی حد یا قوت = ∞ ہے یا وہ لمحہ ہے جس پر بیرونی قوتوں نے اولاً عمل کرنا شروع کیا تھا۔

۲۸۶ - ایک بہت اہم صورت پیدا ہوتی ہے جبکہ سا صرف وقت کے لحاظ سے دوری ہو، فرض کرو

$$\text{سا} = \text{ع جم} (\text{ش ت - جہ})$$

اب حل ہے

$$\text{سا} = \text{ا جم} (\text{کہ ت - صم}) + \frac{\text{ع}}{\text{۲ عم - ۲ بہ ش ت}} \text{جم} (\text{ش ت - جہ}) \quad (۳۵۴)$$

لیکن چونکہ $\text{عم} = \text{بہ کہ ا}$ اس لیے

$$\text{سا} = \text{ا جم} (\text{کہ ت - صم}) + \frac{\text{ع}}{\text{۲ عم (ا - ش ت)}} \text{جم} (\text{ش ت - جہ})$$

اس طرح اب سا میں تغیر، تقد و کم کی سادہ موسیقی حرکت اور نیز تقد و ث کی سادہ موسیقی حرکت سے مرکب ہے جہاں ث قوت عاملہ کا تقد ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ث، کہ سے بہت ہی قریب ہو تو یہ دوسرا ارتعاش بہت بڑے حیظہ کا ہے۔ انتہائی صورت ث، کہ میں دوسرا ارتعاش کا حیظہ لامتناہی ہو جاتا ہے لیکن اب یہ دوا ارتعاش ایک ہی دور کے ہوتے ہیں اور اس لیے ان کو مرکب کیا جاسکتا ہے۔ ہم نہیں کہہ سکتے کہ حاصل ارتعاش لامتناہی حیظہ کا ہو گا کیونکہ ث، اور صہ کی قیمتیں معلوم نہیں ہیں اور یہ عین ایسی ہو سکتی ہیں کہ دوسری رقم کے لامتناہی حیظہ کو برباد کر دیں۔ حاصل شدہ نتیجہ حسب ذیل شکل میں بیان کیا جاسکتا ہے جب کسی نظام پر ایک دوری قوت عمل کرے جس کا تقد و نظام کے صدر ارتعاشات میں سے ایک کے تقد کے بہت ہی قریب ہو تو قسری ارتعاشات بہت بڑے حیظہ کے ہوں گے۔ اس کو گنگام کا اصول کہتے ہیں۔

یہ اصول ایسا ہے جس کے متعدد اطلاقات فطرت میں نظر آتے ہیں مثلاً ایک پل کو جو مطلقاً استوار نہیں ہوتا ایک ایسا نظام سمجھا جاسکتا ہے جس میں متعدد آزاد ارتعاش ہیں۔ اگر آدمیوں کی ایک جماعت قدم میں قدم ملاتے ہوئے یا قاعدہ پل پر سے گزرے تو وہ پل پر ایک دوری قوت لگائیں گے اور اگر ان کے قدم کا دور پل کے آزاد دوروں میں سے کسی ایک پر تقریباً منطبق ہو جائے تو پل میں قسری ارتعاشات کا حیظہ اس قدر بڑا ہو سکتا ہے کہ پل پر خطر ہو جائے۔ یہی سبب ہے کہ جب فوج پل کو عبور کرنا شروع کرتی ہے تو اس کو ”بے قاعدہ قدموں میں چلنے“ کا حکم دیا جاتا ہے۔

دوسری مثال ایک جہاز کی ہو سکتی ہے، جہاز کا مل طور پر استوار نہیں ہوتا اور اس لیے اس میں متعدد آزاد ارتعاش ہوں گے۔ اس کے انجنوں کی حرکت ایک دوری قوت لگائے گی جس کا دور اس کی گردش کے مساوی ہو گا اور اگر یہ

دور جہاز کے آزاد ارتعاشات میں سے کسی پر منطبق ہو جائے تو جہاز بہت بُری طرح نیچے اوپر ہونا شروع کرے گا۔ اس کا علاج انجن کی چال کو بدلتا کر کیا جاسکتا ہے تاکہ وہ جہاز کے آزاد ارتعاش کے ساتھ گمک میں نہ ہو۔

(۳۵۵) آخری مثال کے طور پر یہ بتایا جاسکتا ہے کہ کوئی جہاز اپنے انتصابی محل کے گرد لڑھکنے کا ایک آزاد دور رکھے گا۔ اگر جہاز سمندر کے اندر بہنور میں ہو تو اس سے ٹکرانے والی موجیں بیرونی قوتیں لگائیں گی جن کو تقریباً دوری سمجھا جاسکتا ہے۔ اگر موجوں کا دور جہاز کے دور پر منطبق ہو جائے تو جہاز بہت زیادہ لڑھکنے لگیگا اگرچہ موجیں مقابلتا چھوٹی ہوں۔ اس خطرہ کا علاج جہاز کے راستہ کو بدل کر کیا جاسکتا ہے، اس کا نتیجہ یہ ہوگا کہ موجیں اب مختلف وقفہ پر جہاز سے ٹکرائیں گی۔ دوسرا طریقہ بادبان پھیلا کر جہاز کے میلان کو بدلنے کا ہے، اس کی وجہ سے جہاز توازن کے ایک مختلف محل کے گرد اہتراز کرے گا اور اس کے گرد آزاد ارتعاشات مختلف ہوں گے۔

آئینی مساواتیں

۲۸۷۔ اگر طہ، طہ، ... کسی نظام کے لگرائیجی محدود ہوں تو توانائی بالحرکت ت ایک دو درجی تفاعل ہے طہ، طہ، طہ، ... کا۔
فرض کرو کہ متناظر معیار ع، ع، ...، ع، ع ہیں جو مساواتوں

$$ع = \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}}، \text{ وغیرہ} \quad (۳۰۰)$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اب فرض کرو کہ ہم ایک تفاعل ت شریک کرتے ہیں جہاں

$$ت = ع طہ + ع طہ + ... + ت$$

اس طرح ت ایک تفاعل ہے ع، ع، ...، طہ، طہ، ...، طہ، طہ، ... کا۔

نیز یہ ظاہر ہے کہ ع، ع، ...، تفاعلات ہیں طہ، طہ، ...، طہ، طہ، ... کے۔

ت کو تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{فرت} = \text{ع} \text{ فرطہ} + \text{ع} \text{ فرطہ} + \dots$$

$$+ \text{طہ} \text{ فرع} + \text{طہ} \text{ فرع} + \dots$$

$$- \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} \text{ فرطہ} - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} \text{ فرطہ} - \dots$$

$$- \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} \text{ فرطہ} - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} \text{ فرطہ} - \dots$$

اور یہ مساوات (۲۰۰) کی رو سے

$$\text{فرت} = \text{طہ} \text{ فرع} + \text{طہ} \text{ فرع} + \dots - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} \text{ فرطہ} - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}} \text{ فرطہ} - \dots$$

(۲۰۱)

میں تحویل ہوتی ہے۔

اب چونکہ تفرقی فرطہ، فرطہ، ... اس مساوات میں شریک نہیں ہیں اس لیے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ت کو صرف ع، ع، ...، طہ، طہ، ... کے ایک تفاعل کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔ ہم آسانی سے اس کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ چنانچہ

$$\text{ع} \text{ طہ} + \text{ع} \text{ طہ} + \dots + \text{ع} \text{ طہ}$$

$$= \frac{\text{طہ} \text{ جف ت}}{\text{جف طہ}} + \frac{\text{طہ} \text{ جف ت}}{\text{جف طہ}} + \dots + \frac{\text{طہ} \text{ جف ت}}{\text{جف طہ}}$$

$$= ۲ \text{ ت} \text{ کیونکہ ت ایک متجانس دو درجی تفاعل ہے طہ طہ}$$

..... کا۔

$$\text{ت} = ۲ \text{ ت} - \text{ت} = \text{ت}$$

اس طرح جس سے یہ ثابت ہے کہ ت، ت کے مساوی ہے لیکن وہ ع، ع، ...، طہ، طہ، ... کے ایک تفاعل کے طور پر بیان ہوا ہے۔

اس لیے

$$ت = ت = \frac{۱}{۲} (ع_۱ ط_۱ + ع_۲ ط_۲ + \dots + ع_n ط_n)$$

$$\text{تمثیلاً فرض کرو کہ } ت = ۱ ط_۱ + ۲ ط_۲ + \dots + ب ط_۲$$

$$تو \quad ۱ = ۱ ط_۱ + ۲ ط_۲ \quad ۲ = ۲ ط_۱ + ۳ ط_۲$$

اب تعریف کی رو سے

$$ت = ۱ ط_۱ + ۲ ط_۲ + \dots + ت$$

$$= ۲ ط_۱ + (۱ ط_۱ + ۳ ط_۲) + ۲ ط_۲ + (۳ ط_۱ + ب ط_۲) - ت$$

$$= ت = \frac{۱}{۲} ع_۱ ط_۱ + \frac{۱}{۲} ع_۲ ط_۲$$

مساوات (۲۰۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_۱} = \frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_۱}$$

$$(۲۰۲) \quad \frac{\text{جف ت}}{\text{جف ع}_۱} = ط_۱$$

لگرانج کی مساواتوں

$$\text{فرزت} = \left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_۱} \right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_۱} = ۰$$

میں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_۱} = \frac{\text{جف (ت-ک)}}{\text{جف ط}_۱} = \frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}_۱} = ع_۱$$

اس طرح لگرانج کی مساواتیں شکل

(۲۵۴)

$$\frac{\text{فر ع}_۱}{\text{فرزت}} = \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ط}_۱} = \frac{\text{جف (ت-ک)}}{\text{جف ط}_۱} = \frac{\text{جف (ت+ک)}}{\text{جف ط}_۱}$$

میں لکھی جاسکتی ہیں، اور مساوات (۲۰۲) کی رو سے

$$\frac{\text{فر ط}_۱}{\text{فرزت}} = \frac{\text{جف ت}}{\text{جف ع}_۱}$$

اگر ہم لکھیں $ت = ک + گ$ تو یہ مساواتیں شکل ذیل اختیار کرتی ہیں:

$$\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف}}{\text{جف}}$$

$$\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف}}{\text{جف}} \text{ وغیرہ}$$

۲۸۸ - اس کو حرکتی مساواتوں کی آئینی شکل کہا جاتا ہے۔ تفاعل $ت$ کو ہمیلٹونی تفاعل کہتے ہیں اور چونکہ $ت = ک + گ$ اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ $ک$ تو انائی ہے جو محدودوں $ط$ ، $ط$ ، $ط$ ، $ط$ ، $ط$ اور معیاروں $ع$ ، $ع$ ، $ع$ ، $ع$ ، $ع$ کے ایک تفاعل کے طور پر بیان کی گئی ہے۔ یہ آئینی شکل سادہ ترین اور کامل ترین شکل ہے جس میں تقسیم شدہ حرکتی مساواتیں بیان کی جاسکتی ہیں۔ اسی سبب سے مساواتوں کی یہ آئینی شکل حرکیات اعلیٰ ریاضیاتی طبیعیات اور ریاضیاتی ہمیت کی بہت سی تحقیقاتوں میں ابتداء استعمال کی جاتی ہے۔

۲۸۹ - ہم اس کتاب کو تقسیم شدہ محدودوں کے استعمال کی دو مثالیں دے کر ختم کریں گے، یہ مثالیں ریاضیاتی طبیعیات کی دو شاخوں سے لگتی ہیں۔

مثال ۱ حرکیات سے - فرض کر دو کہ کسی شکل کا ایک ٹھوس جسم

ایک ندی میں ہے جو یکساں رفتار $و$ سے بہہ رہی ہے۔ اگر جسم پانی کی سطح کے نیچے کافی گہرائی پر ہو تو اس کی موجودگی سے سطح پر کے بہاؤ میں کوئی خلل نہیں ہوگا اور صرف جسم کے قرب میں پانی کے بہاؤ میں خلل پڑے گا۔ ابتدائی حرکتی اصولوں سے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ صرف ایک طریقہ ہے جس میں پانی جسم پر سے گزر کر بہہ سکتا ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پانی کے بہاؤ کی توانائی بالحرکت

مساوات

$$ت = ت + ع + و$$

(۳۵) سے حاصل ہوتی ہے جہاں تب وہ قیمت ہے جو توانائی بالحرکت کی ہوگی اگر جسم کو پانی سے نکال لیا جائے۔ فرض کرو کہ جسم پر پانی کے دباؤ کے علاوہ بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ فرض کرو کہ کسی محور کے گرد ان قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ طا ہے اور فرض کرو کہ طہ ایک محدود ہے جس سے اس زاویہ کی پیمائش ہوتی ہے جس میں سے جسم اس محور کے گرد گھومتا ہے۔ تب محدود طہ کے جواب میں لگراج کی مساوات ہے

$$\text{فرت} = \left(\frac{\text{جفت}}{\text{جفت طہ}} \right) - \frac{\text{جفت}}{\text{جفت طہ}} = \text{طا}$$

اگر بیرونی قوتیں جسم کو پانی میں ساکن رکھنے کے لیے عین کافی

$$\text{ہوں تو فرت} = \left(\frac{\text{جفت}}{\text{جفت طہ}} \right) = ۰ \text{ اور اس لیے}$$

$$\text{طا} = - \frac{\text{جفت}}{\text{جفت طہ}} = - \frac{\text{جفت عہ}}{\text{جفت طہ}} \text{ و}^۲$$

پس پانی کے دباؤ کے معیاروں کا مجموعہ۔ طا ہونا چاہئے یا

$$\frac{\text{جفت عہ}}{\text{جفت طہ}} \text{ و}^۲$$

ہم عہ کو جسم کی شکل سے محسوب کر سکتے ہیں اور اس طرح جسم پر عمل کرنے والے جفتوں کا علم حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال برق مقناطیسیات سے۔ وہ توانائی جو طاقتوں طہ طہ کی برق کی دو یکساں ردوں کے بہاؤ کو دو معلومہ بند دوروں میں جاری کر نیکی لیے مطلوب ہوتی ہے شکل

$$ع = \frac{۱}{۲} ل ط^۲ + م ط ط + \frac{۱}{۲} ن ط^۲$$

میں معلوم ہے جہاں ل اور ن علی الترتیب پہلے اور دوسرے دوروں کی شکل پر منحصر ہیں اور م دونوں دوروں کی شکل پر اور نیز ایک دوسرے کے لحاظ سے ان کے محلوں پر منحصر ہے۔

فرض کرو کہ دو سرادور پہلے دور کی جانب کسی خط پر حرکت کرنے میں آزاد ہے۔
فرض کرو کہ لا ایک محدود ہے جو اس خط پر پیمائش کیا گیا ہے اور فرض کرو کہ اس
سمت میں جس میں لا کی پیمائش ہوئی ہے وہ قوت جو دوسرے دور کو ساکن
رکھنے کے لیے مطلوب ہے لا ہے۔

فرض کرو کہ ل سے حسب معمول تفاعل ت۔ ک تبصیر ہوتا ہے اور فرض کرو کہ
دوسرے دور پر ایک بیرونی قوت عاملہ لا عمل کرتی ہے۔ اب محدود لا کے لیے
لگراج کی مساوات ہے:

$$\text{فرت} \frac{\text{جفل}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جفل}}{\text{جف لا}} = \text{لا}$$

اور چونکہ کوئی اسراع نہیں ہے اس لیے

$$\text{لا} = \frac{\text{جفل}}{\text{جف لا}}$$

تجربہ سے معلوم ہوا ہے کہ

$$\text{لا} = \frac{\text{طط جف م}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$$

اگر دو روؤں کی توانائی توانائی بالقوہ ہوتی تو حاصل ہونا چاہئے

$$\frac{\text{جفل}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}}$$

یعنی قوت لا مشاہدہ کردہ قوت کے ٹھیک مخالف ہوتی ہے۔

اس کے برخلاف اگر توانائی توانائی بالحرکت ہے تو

$$\frac{\text{جفل}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ت}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$$

اور اس لیے لا کی قیمت مشاہدہ کے مطابق ہے۔

پس ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ کسی برقی رو کی توانائی کلاً توانائی بالحرکت

ہوتی ہے۔

عام مثالیں

۱۔ ایک انجن کی رگڑ ایسی ہے کہ ایک اسی طاقت سے وہ ۲۵۰ گردشیں فی ثانیہ کرنے لگتا ہے جبکہ کوئی بیرونی کام انجام نہیں دیتا۔ اس کے متحرک حصوں کا جمود ایسا ہے کہ جب انجن ۱۵۰ گردشیں فی ثانیہ کرتا ہے اور اس پر ایک اسی طاقت عمل کرتی ہے تو اس کی چال میں ۱۰ گردشوں فی ثانیہ کا اسراع پیدا ہوتا ہے۔ اگر انجن کو اپنے حال پر چھوڑ دیا جائے جبکہ وہ اپنی پوری چال ۲۵۰ گردشوں فی ثانیہ سے حرکت کر رہا ہو تو معلوم کرو کہ ساکن ہونے سے پیشتر وہ کتنی گردشیں کریگا۔

۲۔ ایک مربع ایک وتر کے گرد زاوی رقتار سے آزادانہ حرکت کر رہا ہے کہ اچانک ایک راس جو اس وتر میں نہیں ہے ثابت ہو جاتا ہے۔ اس ثابت نقطہ پر دہکے کا دباؤ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ نئی زاوی رقتار ۱/۲ سے ہوگی۔

۳۔ چار مساوی ڈنڈے جن میں سے ہر ایک کا طول ۱۲ اور کمیت ک ہے ایک معین کی شکل میں آزادانہ جوڑے گئے ہیں۔ یہ نظام سکون سے انتصابی وتر کے ساتھ گرتا ہے اور ایک ثابت افقی بے پچک مستوی سے ٹکراتا ہے۔ دہکے اور اس کے بعد والی حرکت معلوم کرو۔

۴۔ دو ذرے جو ایک استوار ڈنڈے کے ذریعہ مربوط ہیں ایک چکنے انتصابی دائرہ پر حرکت کرتے ہیں۔ چھوٹے اہتزاز کا وقت معلوم کرو۔

۵۔ ایک ایکساں ڈنڈے کا طول l ہے، اس کے وسطی نقطہ سے فاصلہ $ج$ پر کے دو نقطوں سے مساوی دوریاں باندھی گئی ہیں اور ان دوریوں کے دوسرے سرے دو ثابت نقطوں سے جن کا درمیانی فاصلہ $ج۲$ ہے باندھے گئے ہیں، یہ ثابت نقطے ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں۔
صدر محدود اور ارتعاش کے متناظر دور معلوم کرو۔

۶۔ اگر پچھلی مثال کے ڈنڈے کے ایک سرے پر دھک د کی ایک افقی ضرب اس کے طول کے علی القوائم پڑے تو دھکے کے بعد والی حرکت معلوم کرو۔

۷۔ نصف قطر کا ایک کھردرا ایکساں اسطوانہ ہے اور اس کی مرکزی تراش کے گرد ایک نامتداد پذیر دوری لپٹی ہوئی ہے۔ دوری کا ایک سہرا ایک ثابت نقطہ ف سے بندھا ہے اور اسطوانہ کو گھماتے ہوئے دوری کو اس پر لپٹا گیا ہے یہاں تک کہ وہ نقطہ ف کو مس کرتا ہے اور ف پر اسطوانہ کا مماس انتصابی ہے۔ تب اسطوانہ کو چھوڑ دیا گیا ہے حرکت معلوم کرو۔

۸۔ پچھلی مثال میں اگر ف پر کا مماس اسطوانہ کے محور پر عمود ہو لیکن ٹھیک انتصابی نہ ہو تو حرکت معلوم کرو۔ (۳۶۰)

۹۔ کرووی قطبی محدودوں میں ثابت کرو کہ اکائی کمیت کے ایک متحرک ذرہ کی توانائی بالحرکت

$$ت = \frac{1}{\rho} (ز^2 + ر^2 ط^2 + ر^2 جب^2 ط^2)$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

پس ثابت کرو کہ ذرہ کے اسراع کے اجزائے ترکیبی، ر، ط، لہ کی بڑھتی ہوئی سمتوں میں حسب ذیل مقداروں کے ہیں:

$$\frac{فر}{فرت} \left(\frac{جفت}{ز} \right) - \frac{جفت}{ر} \left[\frac{فر}{فرت} \left(\frac{جفت}{ط} \right) - \frac{جفت}{ط} \right]$$

$$\frac{ا}{رجب ط} \frac{فر}{فرت} \left(\frac{جفت}{جف لہ} \right)$$

ثابت کرو کہ ان اسراعوں کی اصلی قیمتیں حسب ذیل ہیں:

$$\frac{فر^2}{فرت} - ر ط^2 - ر جب ط لہ^2 - ر \frac{فر}{فرت} (ر ط^2) - ر جب ط جم ط لہ^2$$

۱۔ رجب طہ فر (رجب طہ نہ)

۱۰۔ یہ معلوم ہوا کہ ایک ذرہ کی رفتار اس کے مدار میں اس فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے جو اس کو ایک ثابت نقطہ سے ہے۔ اس کا مدار معلوم کرنے میں قسطنطین عمل کا اصول استعمال کرو اور اس سے کشش کا قانون دریافت کرو۔

یہی نتیجہ توانائی کے قانون بقا سے اخذ کرو۔

۱۱۔ فرض کرو کہ کائنات کی تمام قوتیں نابود کر دی گئی ہیں اور یہ کہ ایک مخفی میکا نیت ہے جو توانائی بالحرکت کی حامل ہو سکتی ہے۔ فرض کرو کہ اس توانائی بالحرکت کی مقدار صرف کائنات کے مادی اجسام کے محلوں پر منحصر ہے اور اگر کائنات کی قوتیں نابود نہ ہوتیں تو مذکورہ بالا توانائی بالحرکت مقدار میں صرف ایک مستقل اور علامت کے اختلاف کے ساتھ نظام کی توانائی بالقوہ کے مساوی ہوتی۔

ثابت کرو کہ اس قسم کی کائنات کے حرکیاتی مظاہر اس کائنات کے حرکیاتی مظاہر کے مماثل ہوں گے جس میں دونوں قوتیں اور توانائی بالحرکت موجود ہوں جہاں غائبی الذکر کائنات کی تبدیلیاں نیوٹن کے قوانین حرکت سے متعین کی گئی ہوں۔

۱۲۔ متعدد بے کمیت کڑے جن کے نصف قطر 'ب' ج' ... ہیں کثافت نہ کے ایک لامتناہی سمندر میں ایک خط مستقیم میں حرکت کرتے ہیں، ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلے 'و'، 'ب'، 'ج' ... ہیں اور ان کی رفتاریں 'و'، 'ب'، 'ج' ... ہیں۔ جب 'ب'، 'ج' ... بمقابلہ 'و'، 'ب'، 'ج' ... کے چھوٹے ہوتے ہیں تو سمندر کی حرکت

کی توانائی بالحرکت

$$ت = \frac{۲}{۳} \pi \text{ ش } ۱ \text{ و } ۱ + \dots + \frac{۲}{۳} \pi \text{ ش } ۲ \text{ و } ۲ + \dots + \frac{۲}{۳} \pi \text{ ش } ۳ \text{ و } ۳ + \dots$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

ثابت کرو کہ کسی مُشاہد کو جو سمندر کی موجودگی سے بے خبر ہو کرے
اس طرح حرکت کرتے نظر آئیں گے گویا کہ ان کمیتیں $\frac{۲}{۳} \pi \text{ ش } ۱$ و $\frac{۲}{۳} \pi \text{ ش } ۲$ و $\frac{۲}{۳} \pi \text{ ش } ۳$

$\frac{۲}{۳} \pi \text{ ش } ۲$ و $\frac{۲}{۳} \pi \text{ ش } ۳$ ہیں اور گویا کہ وہ قوتیں جو کروں کے ہر زوج کے

درمیان عمل کرتی ہیں ان کی ان کمیتوں کے حاصل ضرب کے اور
ان کی رفتاروں کے حاصل ضرب کے متناسب ہیں اور نیز ان کے
درمیانی فاصلے کی چوتھی قوت کے بالعکس متناسب ہیں۔

تہمت

اشاریہ

نظری علم الحیئل

نوٹ: اعداد سے صفحات کا حوالہ دیا گیا ہے۔

- ابطالہ ۱۸
 آثار، سریع ترین کا خط ۲۷۹
 ارتعاش ۵۰۱، ۵۰۸
 آزادی کے درجوں کی تعداد ۲۶۶، ۲۷۹
 اسپریت طاقت ۲۱۰
 استواری ۱۳۱
 اسراع ۱۷
 متواری الاضلاع ۱۹
 دائری حرکت میں ۲۱، ۲۸
 اصول، اقل عمل کا ۴۷۳
 ہمیلٹن کا ۴۷۶
 اضافی حرکت ۵
 اقل ترین عمل ۴۷۲
 اکائی، رفتار کی ۹
 قوت کی ۴۵

- کام کی '۲۱۰
 انتقال پذیری 'قوت کی '۱۳۶
 اہتزاز 'ایک رقا ص کے '۴۳۱
 چھوٹے 'عام حرکیاتی نظام کے '۵۰۱
 قسری '۵۰۸
 اوسط رفتار '۹
 ایکسانیت فطرت کی '۱
 آئینی مساواتیں '۵۱۱
 بقا 'توانائی کا '۲۴۸
 خطی معیار حرکت کا '۳۲۳
 زاویائی معیار حرکت کا '۴۲۹
 پترے کا مرکز ثقل '۱۷۶ '۱۹۵
 پھکاؤ 'بڑے سے بڑا 'معیار '۳۴۵
 پیشی 'گروئی 'مرکز ثقل '۱۹۰
 پیمائش 'رفتار کی '۹
 اسراع کی '۱۸
 کیفیت کی '۴۴
 قوت کی '۴۵
 کام کی '۲۰۹
 اسراع بوجہ جاذبہ کی '۲۷۳
 دھکے کی '۳۳۹
 تجاذب کا قانون '۴۰۳
 تحفظی یا بقائی نظام 'قوتوں کا '۲۳۷
 تدویری رقا ص '۳۸۴
 ترکیب 'حرکتوں کی '۶

ترکیب، رفتاروں کی، ۱۰

اسراعوں کی، ۱۹

ایک ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کی، ۵۴

ایک مستوی میں عمل کرنے والی قوتوں کی، ۱۳۸

متوازی قوتوں کی، ۱۴۴

جفتوں کی، ۱۵۲

گردشوں کی، ۴۱۴

تصادم، ۳۴۵

ذرہ کا ثابت سطح پر، ۳۴۹

کسی دو متحرک اجسام کا، ۳۵۲

دو چکنے کروں کا، ۳۵۶

تعال، ۴۶

رگڑ کا، ساکن اجسام کے درمیان، ۶۸

متحرک اجسام کے درمیان، ۲۹۰

تعدد، ارتعاش کا، ۳۸۱

تعذیلی توازن، ۲۶۴

تعمیمی محدود، ۴۶۳

دھک، ۴۹۸

معیار حرکت، ۴۹۸

تغیر، ج کی قیمت میں، ۲۸۹

ارضی عرض بلد کا، ۴۴۸

تفرقی مساواتیں، مداروں کی، ۳۹۷

تناؤ، دوری کا، ۶۲، ۱۱۱

توازن، ذرہ کا، ۵۶، ۶۰

ذروں کے نظام کا، ۹۴

توازن، استوار جسم کا ۱۳۴
 کی قائمیت اور غیر قائمیت، ۲۵۳، ۵۰۶، ۵۰۷
 توانائی، بالقوہ، ۲۳۶
 بالحرکت، ۲۳۳، ۳۳۰
 کل، ۲۳۸
 بقا، ۲۳۸
 ایک نظام کے حرکت کی، ۳۳۲
 استوار جسم کی، ۴۱۸
 توانائی بالحرکت، ۲۳۳
 ذروں کے نظام کی، ۳۳۰
 گردش کی، ۴۱۷
 استوار جسم کی، ۴۱۸
 توانائی بالقوہ، ۲۳۶
 توسیع پذیری، ڈوریوں کی، ۶۶
 ٹپہ، مری کا، ۳۰۲
 جاذبہ ارض، اس کے خلاف کام، ۲۲۰
 اس کے تحت گرنے میں حرکت، ۲۷۴
 عرض بلد کے ساتھ تغیر، ۲۸۹
 جفت، ۱۴۷
 متوازی سطویوں میں، ۱۵۰
 ان کی ترکیب، ۱۵۲
 ان کے خلاف کام، ۲۲۱
 جمود کا معیار، ۴۱۸
 کے سر اور حاصل ضرب، ۴۳۷، ۴۳۸
 کا ناقص نما، ۴۳۸

کے صدر محور '۴۳۹

جمود کے محور '۴۳۹

جھوک 'دوری کا' ۱۴۴

جھولا پل '۱۱۲

چرخ اور محور '۹۵

چرخوں کے نظام '۲۲۶

حاصل ضرب 'جمود کے' ۴۳۸

حرکت 'حوالے کے فریم کے حوالے سے' ۵

استوار جسم کی '۱۳۳' ۴۱۳

متحرک حوالے کے فریم کے حوالے سے '۲۸۵

ذروں کے نظام کی '۳۱۹

کسی نظام کے مرکز ثقل کی '۳۲۲

سادہ موسیقی '۳۷۷

قوت کے مرکز کے گرد ذرہ کی '۳۸۸

معکوس مربع کے قانون کے تحت ذرہ کی '۳۹۹

حوالے کا فریم '۴۹' ۵

متحرک کے حوالے سے حرکت '۲۸۵

متحرک کے حوالے سے توانائی بالحرکت '۳۳۰

حیطہ 'رقاص کا' ۳۷۶

سادہ موسیقی حرکت کا '۳۸۳

خط عمل 'قوت کا' ۸۹

دائری قوس 'مرکز ثقل' ۱۸۲

دھکے '۳۳۷

پچکاؤ کا '۳۷۷

نغیسی '۴۹۷

دھکے والی قوتیں، ۳۳۷، ۴۹۷

دور، ارتعاش کا، ۳۷۷

سادہ موسیقی حرکت کا، ۳۸۳

دوہرے تارے، ۴۰۴

دوری، کاتناؤ، ۶۲

کی ملائیت، ۶۳

کی توسیع پذیری، ۶۵

سطح پر، ۱۱۰

کا جھوک، ۱۲۴

تناؤ میں کام، ۲۱۶

ذروں کا نظام، سکون، ۸۸

حرکت، ۳۱۹

توانائی بالحرکت، ۳۳۰

رفقار، ایکساں اور متغیر، ۸

اوسط، ۹

ترکیب، ۱۰

کا معیار، ۳۹۵

زاوی، ۴۱۳

رقاص، سادہ، ۳۷۴

ثانیوں کا، ۳۷۸

کی عام حرکت، ۴۳۱

رگڑ، ۶۸

کی قدر، ۶۹

متحرک کھردرے اجسام کے درمیان تعامل، ۲۹۰

رگڑ کا زاویہ، ۶۹

ریچ ' ۱۵۶

زاویہ ' رگڑ کا ' ۶۹

زاوی ' رفتار ' ۴۱۳

اس کی ترکیب ۴۱۴

زاوی ' معیار حرکت ' ۴۲۹

کا بقا ' ۴۲۹

زمین کی گردش ' ۲۸۷ ' ۴۴۸

زنجیرہ ' ۱۱۸

سادہ موسیقی حرکت ' ۳۷۶

ستارے ' دوہرے ' مدار ' ۴۰۴

سر ' جمود کے ' ۴۳۷

سریع ترین اتار کا خط ' ۲۷۹

سکون ' ۴

سمتی ' ۲۳

ایک مستوی میں ' ۲۴

فضا میں ' ۲۹

ستیارہ کی گردش ' ۴۴۷

صدر محدود ' ۵۰۵

صدر محور ' جمود کے ' ۴۳۹

عرض بلد کے تغیر کے ساتھ جاذبہ کا تغیر ' ۲۸۹

ارضی عرض بلد کا تغیر ' ۴۴۸

عمل ' ۴۷۲

اقل ترین عمل کا اصول ' ۲۷۳

عود کا دھک ' ۳۴۵

فاصل توازن ' ۲۶۴

- فریم، حوالے کا، ۴۹، ۵
- متحرک کے حوالے سے حرکت، ۲۸۵
- متحرک کے حوالے سے توانائی بالحرکت، ۳۳۰
- قائمیت اور غیر قائمیت توازن کی، ۲۵۳، ۵۰۶
- قدر، رگڑ کی، ۶۹
- لچک کی، ۳۴۸
- قسری اہتزاز، ۵۰۸
- قطاع، دائرہ کا، مرکز ثقل، ۱۸۶
- کرہ کا، مرکز ثقل، ۱۹۳
- قطعہ، دائرہ کا، مرکز ثقل، ۱۸۵
- قوانین، فطرت کے، ۱
- حرکت کے، ۳۹
- قوت، ۳۹
- کی پیمائش، ۴۵
- کی انتقال پذیری، ۱۳۶
- قوتیں، ترکیب اور تحلیل، ۵۵
- ایک مستوی میں، ۹۸، ۱۳۸
- متوازی، ۱۳۹، ۱۴۴
- فضاء میں، ۱۵۴
- دھکے والی، ۳۳۷
- قوس، دائری، مرکز ثقل، ۱۸۲
- کام، پیمائش، ۲۰۹
- متغیر قوت کے خلاف، ۲۱۳
- دوری کے تئنائے میں، ۲۱۴
- رقبہ سے تعبیر، ۲۱۶

- کام ، مائل قوت کے خلاف ، ۲۱۸
 ہاذبہ کے خلاف ، ۲۲۱
 جفت کا ، ۲۲۱
 موہوم ، اصول ، ۲۲۴
 دھکے کا ، ۳۴۰
 کیپر کے قوانین ، ۴۰۳
 گردی ٹوپی ، مرکز ثقل ، ۱۸۸
 کمیت ، پیمائش ، ۴۴
 گردش ، کا محور ، ۱۳۴
 زمین کی ، ۲۸۷
 استوار جسم کی ، توانائی بالحرکت ، ۴۱۸
 سیارہ کی ، ۴۴۷
 گردش کا محور ، ۱۳۴
 گمک کا اصول ، ۵۱۰
 گھاؤ کا نصف قطر ، ۴۱۸
 لٹو کی حرکت ، ۴۴۹
 لچک ، دوری کی ، ۴۴۹
 کا مقیاس ، ۶۶
 ٹھوس جسم کی ، ۳۴۵
 کی قدر ، ۳۴۸
 نفاق ، مریوں کے راستوں کا ، ۳۰۵
 لکرائیج کی مساواتیں ، ۴۷۴
 دھکے والی قوتوں کے لیے ، ۴۹۷
 غیر تقاضائی نظامات کے لیے ، ۴۹۰
 مائل مستوی پر ذرہ کی حرکت ، ۲۷۸

متوازی الاضلاع کا قانون 'رفقاریں' ۱۳
 اسراع' ۱۹
 قوتیں' ۵۵
 جفت' ۱۵۲
 زاویہ رفقار' ۴۱۴

متوازن کرنا' انجن کو' ۴۸۹
 متوازی قوتیں' ۱۳۹، ۱۴۴
 مثلث 'رفقاریوں کا' ۱۵
 مثلثی پترا' مرکز ثقل' ۱۷۶
 محدود تعمینی' ۴۶۳

سدر' ۵۰۵

محور، جمود کے' ۴۳۹
 محور، گردش کے' ۱۳۴
 مخروط مضلع' مرکز ثقل' ۱۹۱
 مخروطی رفاص' ۳۹۳
 مدار' عام نظریہ' ۳۹۴

کی تفرقی مساوات' ۳۹۷

مدار' ایک ذرہ کا' راست فاصلہ کا قانون' ۳۸۸
 فاصلہ کے معکوس مربع کا قانون' ۳۹۹
 مرکز ثقل' ۱۷۱

پترے کا' ۱۷۶، ۱۹۵

ٹھوس جسم کا' ۱۹۰، ۱۹۶

مثلث کا' ۱۷۶

مخروط مضلع کا' ۱۹۱

دائری قوس کا' ۱۸۲

مرکز ثقل، قطعہ دائرہ کا، ۱۸۵

قطاع دائرہ کا، ۱۸۶

کروی ٹولی کا، ۱۸۸

کروی بیٹی کا، ۱۹۰

کی حرکت، ۳۲۴

مرکزی محور، قوتوں کے نظام کا، ۱۵۶

مرکز ہندسی، ۳۱

مرمی، ۲۹۷

افقی مستوی پر پٹہ، ۳۰۲

مائل مستوی پر پٹہ، ۳۰۳

راستوں کا لفاف، ۳۰۵

مساوات، توانائی کی، ۲۴۷، ۳۷۲

ایک ذرہ کی حرکت کی، ۳۶۸

ایک ذرہ کے مدار کی، ۳۹۷

ایک استوار جسم کی، ۴۴۰

مساواتیں، یولر کی، ۴۴۴، ۴۹۹

لگرائج کی، ۴۷۴، ۴۹۳

آئینی، ۵۱۱

مستوی، قوتوں کی ترکیب ایک مستوی میں، ۱۳۸

ایک قوت کے گرد مدار کا ایک مستوی میں ہوتا، ۳۹۵

مطلق اکائیاں، قوت کی، ۴۵

کام کی، ۲۱۱

منظہار نقشہ، ۴۳۸

معلوس مربع کا قانون، ۳۹۹

معیار، قوت کا، ۹۰

معیار، رفتار کا ۳۹۵

جمود کا ۴۱۸

معیار حرکت کا ۴۲۷

بڑے سے بڑے پچکاؤ کا ۳۴۵

معیار، صدر، جمود کے ۴۳۷

معیار حرکت ۴۳

خطی کا بقا ۳۲۳

کا معیار ۴۲۷

زاوی کا بقا ۴۲۹

تقسیمی ۴۹۸

مقیاس، لچک کا ۶۶

ملائمت، دوریوں کی ۶۳

موسیقی حرکت، سادہ ۳۷۶

موسم کام کا اصول ۲۲۴

ناقص نما، جمود کا ۴۳۸

نصف قطر گھاؤ کا ۴۱۸

نظام چرخوں کا ۲۲۶

تحفظی قوتوں کا ۲۳۷

نقشہ، منظر ۲۱۷

نقطہ عمل، قوت کا ۱۳۶، ۸۹

نیوٹن کے قوانین حرکت ۳۹

ہک کا قانون ۶۶

پہلیں کا اصول ۴۶۷

وزن، ایک ذرہ کا ۶۶

ذروں کے نظام کا ۱۷۲

یولر کی مساواتیں ۴۴۴، ۴۹۹

اصطلاحات

نظری علم بحیل

Acceleration	اسراع
Action	عمل
Amplitude	حیطہ
Automobile	آٹوموبیل
Bob	لنگر
Buoyancy	تیراؤ، اچھال
Capstan	لنگر خرج
Canonical equations	آئینی مساواتیں
Catenary	زنجیرہ
Centroid	مرکز ہندسی
Circuit	دور
Coefficient of friction	رگڑ کی قدر
Coefficients of Inertia	جمود کے سر
Compression	پھیکاؤ
Conservation (of energy)	تحفظ (توانائی کا)
Conservative (system of forces)	تحفظی یا بقائی (قوتوں کا نظام)

Contact

تماس

Couple

جفت

Couplings

جوڑک

Crane

حمالہ

Crank

کرنیک، گردونہ

Cycloid

خط تدویر

Cycloidal pendulum

تدویری قاص

Dip

میلان

Driving wheels

چلاؤ پیسے

Equilibrium

توازن

Elasticity

لچک

Electromagnetism

برق مقناطیسیت

Ellipse

ناقص

Ellipsoid

ناقص نما

Envelope

لفاف

Experimental science

تجربی سائنس

Extensible

امتداد پذیر

Extensibility

توسیع پذیری

Extension

توسیع

External forces

بیرونی قوتیں

Flanges

کورس

Flexibility

ملائمت

Forced oscillation

قسری ارتعزاز

Fork

دو شاخہ

Frame of reference

حوالے کا فریم

Frequency	تعدد
Friction	رگڑ
Gearing	گیرائی
Galvanometer	برقی روپیجا
Generalized coordinates	تعمیمی محدود
Harmonic	موسیقی
Hold (of a ship)	پیٹا (جہاز کا)
Horse-power	اسی طاقت
Hub	ناف
Hydrodynamics	ما حرکیات
Hyperbola	قطع زائد
Impact	تصادم
Impulse	دھک
Inclined plane	ماں مستوی
Indicator diagram	منظہار نقشہ
Inertia	جمود
Inextensible	نا امتداد پذیر
Internal forces	بیرونی قوتیں
Kinetic Energy	توانائی بالحرکت
Lamina	پترا
Law of inverse square	معکوس مربع کا قانون
Line of action	خط عمل
Line of quickest descent	سریع ترین اتار کا خط
Lockgate	تقلی گیٹ
Locomotive	لوکو موٹف، حراکہ

Mechanics

Modulus of Elasticity

Moment

Momentum

Natural science

Orbit

Oscillations

Parabola

Pedal

Pendulum

Period

Pitch

Piston

Pivot

Point of inflection

Potential energy

Poundal

Principal axes

Projectile

Range (of a projectile)

Reaction

Reflection

Resilience

Resolution (of forces)

Rest

علم الجہیل

لچک کی قدر

معیار

معیار حرکت

طبعی سائنس

مدار

اہتزاز

مکانی

رکاب

رقاص

دور

گھائی

فشارہ

چول

نقطہ انعطاف

توانائی بالقوہ

پونڈل

صدر محاور

مرمی

پہ (مرمی کا)

تفاعل

انعکاس

بازگشتگی

تحلیل (قوتوں کی)

مسکون

Restitution (impulse of)	عود (کا دھک)
Retardation	ابطاء
Rigidity	استواری
Roller	بیلن
Rolling friction	رولنگ فریکشن
Rotation	گردش
Sag	جھوک
Shell	خول
Simple harmonic motion	سادہ موسیقی حرکت
Skidding	گھسٹنا
Slack (couplings)	ڈھیلے (جوڑک)
Span	فصل
Spherical cap	کروی ٹوپی
Spokes	آرے
Strength	طاقت
Suspension bridge	جھولاپل
Tension	تनाव
Theoretical Science	نظری سائنس
Thrust	دھکیل
Tractive force	جبری قوت
Transformation	استحال
Translation (motion of)	(حرکت) انتقال
Transmissibility	انتقال پذیری
Uniformity of nature	فطرت کی ایکسانیت
Vectors	سمتی

Vibrations

ارتعاش

Windlass

ڈنڈا چرخ

Windmill

ہوائی چکی

Wheel and axle

چرخ اور محور

Work

کام

